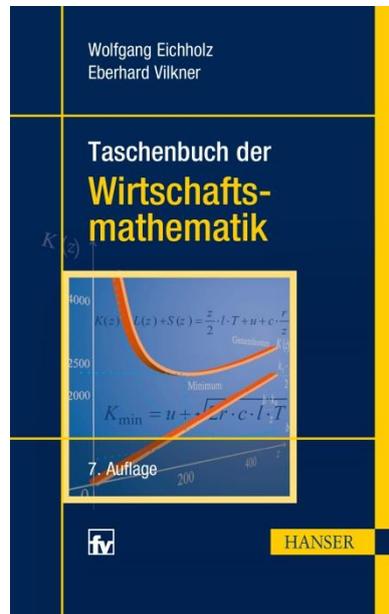


HANSER



Leseprobe

zu

„Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik“

Wolfgang Eichholz und

Eberhard Vilknor

ISBN (Buch): 978-3-446-44934-3

ISBN (E-Book): 978-3-446-45528-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

Dieses Kompendium auf dem Gebiet der Wirtschaftsmathematik stellt eine Brücke zwischen den mathematischen Verfahren und den wirtschaftlichen Anwendungen in komprimierter Form dar. Es enthält die wichtigsten Formeln, Gesetze und Verfahren aus der Wirtschaftsmathematik in den Bereichen der Grundlagen, der Linearen Algebra und Optimierung, der Reihen und Finanzmathematik, der Funktionen mit einer und mehreren Variablen inkl. der Differenzial- und Integralrechnung sowie Differenzial- und Differenzengleichungen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der beschreibenden und schließenden Statistik.

Durch die Software-Entwicklung wird der Zugang zu mathematischen Verfahren und somit auch zu immer komplizierteren wirtschaftlichen Modellen erleichtert. Dem trägt das Kapitel Numerische Verfahren Rechnung, in dem ein kleiner Einblick in Begriffe und Methoden der numerischen Mathematik gegeben wird.

Das abschließende Kapitel Operations Research beinhaltet eine Zusammenstellung wichtiger wirtschaftlicher Problemstellungen sowie deren mathematische Modellierung und Methoden zur Lösung.

Zahlreiche, ausführlich durchgerechnete Beispiele verdeutlichen die mathematischen Zusammenhänge.

Das Taschenbuch wendet sich sowohl an Studierende wirtschaftlicher Fachrichtungen als auch an die in der Praxis tätigen Wirtschaftswissenschaftler. Es ist nützlich als Nachschlagewerk beim Lösen von Übungsaufgaben, bei der Prüfungsvorbereitung, bei Klausuren sowie bei der Bearbeitung von praktischen Problemstellungen. Das Buch ist somit auch für die berufliche Weiterbildung von Interesse.

Das Kapitel 9 und der Abschnitt 8.2 entstanden unter Mitwirkung von Prof. Dr. oec. habil. Hans-Jürgen HOCHGRÄFE, Hochschule Wismar, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, wofür wir ihm recht herzlich danken.

Unser Dank gilt insbesondere Frau Christine FRITZSCH, Frau Mirja WERNER und Frau Katrin WULST vom Fachbuchverlag Leipzig für die gute Zusammenarbeit. Wir danken auch den Lesern, die mit Hinweisen und Ergänzungswünschen zur Verbesserung und Erweiterung des Taschenbuches beigetragen haben.

Für die vierte Auflage wurden alle Kapitel durchgesehen, überarbeitet, teilweise neu gefasst und ergänzt. Einige Abbildungen wurden eingefügt bzw. erneuert. Zahlreiche Beispiele wurden neu aufgenommen.

Folgende Erweiterungen wurden ab der 4. Auflage vorgenommen:

- *Partialbruchzerlegung* und *komplexe Zahlen* im Kapitel Grundlagen;
- *Matrizengleichungen* und der *einfache GAUSS-Algorithmus* im Kapitel Lineare Algebra und Optimierung;
- *Integration gebrochenrationaler Funktionen*, *Differenzialgleichungen 2. Ordnung* und *Differenzengleichungen* im Kapitel Funktionen mit einer reellen Variablen;
- *BENFORD-Verteilung*, *Boxplot*, *Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest* und *ein weiteres Zusammenhangsmaß* im Kapitel Statistik sowie
- *Simulationsmethoden* im Kapitel Operations Research.

Die 6. Auflage wurde komplett durchgesehen und neu in L^AT_EX gesetzt, wofür wir uns ganz herzlich bei Dr. Steffen NAAKE bedanken möchten.

Die vorliegende 7. Auflage wurde dank vieler Hinweise der Herren Prof. Dr. Hans-Jürgen HOCHGRÄFE, Prof. Dr. Uwe HÄR, Prof. Dr. Ludwig PADITZ, Dr. Rüdiger STEGEN u. a. weiter verbessert.

Über die Homepage des Verlages www.hanser-fachbuch.de gelangt der Leser zu weiteren Aufgaben mit Lösungen.

Für Anregungen, Verbesserungen und Kritiken aus dem Leserkreis sind die Verfasser jederzeit dankbar. Wir wünschen uns, dass dieses Buch für das Studium und den Beruf ein zuverlässiger Ratgeber ist.

Wismar, Dezember 2017

Wolfgang Eichholz
Eberhard Vilkner

Inhaltsverzeichnis

Benutzerhinweise	12
Bezeichnungen	13
1 Grundlagen	15
1.1 Mengen	15
1.2 Aussagenlogik	17
1.3 Zahlenmengen	18
1.4 Zahlensysteme	19
1.5 Reelle Zahlen R	21
1.5.1 Axiome und Rechenregeln in R	21
1.5.2 Summen- und Produktzeichen	27
1.5.3 Fakultät, Binomialkoeffizient	28
1.6 Kombinatorik	29
1.7 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	32
1.8 Gleichungen, Ungleichungen mit einer Variablen	34
1.8.1 Gleichungen	34
1.8.2 Ungleichungen	40
1.9 Lineare geometrische Zusammenhänge	42
1.9.1 Geraden	42
1.9.2 Halbebenen	42
1.9.3 Dreiecke	43
1.10 Komplexe Zahlen C	44
2 Lineare Algebra und Optimierung	53
2.1 Determinanten	53
2.1.1 Begriff, Berechnung für $n \leq 3$	53
2.1.2 Entwicklungssatz von LAPLACE	55
2.1.3 Eigenschaften von Determinanten	55
2.2 Matrizen	59
2.2.1 Begriffe	59
2.2.2 Rechnen mit Matrizen	60
2.2.3 Besondere Matrizen	65
2.2.4 Eigenwerte, Eigenvektoren	67
2.3 Lineare Gleichungssysteme	69
2.3.1 Lineare Abhängigkeit	69
2.3.2 Rang	70
2.3.3 Lösbarkeitsbedingung linearer Gleichungssysteme	71

2.3.4	GAUSS-Algorithmus	72
2.3.5	Basistransformation	78
2.4	Matrizengleichungen	84
2.4.1	Lösen von Matrizengleichungen	84
2.4.2	Anwendungen in der Wirtschaft	86
2.5	Lineare Ungleichungssysteme	87
2.5.1	Begriffe	87
2.5.2	Lösen linearer Ungleichungssysteme	89
2.6	Lineare Optimierung	93
2.6.1	Begriffe	93
2.6.2	Lösen linearer Optimierungsprobleme	94
2.6.3	Simplexmethode	101
2.6.4	Dualität in der linearen Optimierung	108
3	Funktionen, Folgen, Reihen	111
3.1	Begriffe	111
3.2	Eigenschaften	113
3.3	Umkehrfunktionen	114
3.4	Verknüpfungen und Verkettungen	115
3.5	Grundfunktionen einer reellen Variablen	117
3.6	Zahlenfolgen	120
3.7	Zahlenreihen	122
4	Grundlagen der Finanzmathematik	126
4.1	Einfache Verzinsung	126
4.2	Zinseszinsen	130
4.3	Rentenrechnung	134
4.4	Tilgungsrechnung	138
4.5	Investitionsrechnung	140
4.6	Abschreibungsrechnung	143
4.6.1	Lineare Abschreibung	143
4.6.2	Degressive Abschreibung	145
4.6.3	Progressive Abschreibung	147
4.7	Kursrechnung	148
4.7.1	Kurs einer Annuitätenschuld	149
4.7.2	Kurs einer Ratenschuld	150
4.7.3	Kurs einer gesamtfälligen Schuld	150
5	Funktionen mit einer reellen Variablen	153
5.1	Grenzwert von Funktionen	153
5.2	Stetigkeit	156
5.3	Ableitung einer Funktion	158

5.4	Anwendung der Ableitung	161
5.4.1	Differenzial und Fehlerrechnung	161
5.4.2	Grenzfunktion	163
5.4.3	Wachstumsrate und Elastizität	164
5.4.4	NEWTON-Verfahren (Tangentenverfahren)	166
5.4.5	TAYLORScher Satz	167
5.4.6	Regel von BERNOULLI-L'HOSPITAL	168
5.5	Untersuchung von Funktionen	170
5.5.1	Stetigkeit und Mittelwertsatz	170
5.5.2	Monotonie und Extremwerte	170
5.5.3	Krümmung und Wendepunkte	172
5.5.4	Kurvendiskussion	173
5.5.5	Anwendung in der Wirtschaft	174
5.6	Integralrechnung	176
5.6.1	Unbestimmtes Integral	176
5.6.2	Bestimmtes Integral	180
5.6.3	Uneigentliche Integrale	182
5.6.4	Integration stückweise stetiger Funktionen	183
5.6.5	Numerische Integration	184
5.6.6	Anwendungen der Integralrechnung	186
5.7	Differenzialgleichungen	188
5.7.1	Einführung	188
5.7.2	Separable Differenzialgleichungen	188
5.7.3	Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	190
5.7.4	Lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	192
5.8	Differenzengleichungen	195
5.8.1	Einführung	195
5.8.2	Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten	196
6	Funktionen mit mehreren Variablen	202
6.1	Begriff und Eigenschaften	202
6.2	Partielle Ableitungen, Gradient, HESSE-Matrix	203
6.3	Vollständiges Differenzial, Fehlerrechnung und Elastizität	205
6.4	Extremwertbestimmung	206
6.5	Extremwertbestimmung mit Nebenbedingungen	209
6.6	Methode der kleinsten Quadrate (MkQ)	210
7	Numerische Verfahren	215
7.1	Fehlerarten	215
7.2	Zahlendarstellungen	216

7.3	Fehleranalyse	217
7.4	Grundbegriffe der Funktionalanalysis	219
7.5	Iterationsverfahren	221
7.5.1	Fixpunktiteration bei nichtlinearen Gleichungen	222
7.5.2	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme	223
7.5.3	Iterative Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	225
7.6	Direkte Lösungsverfahren der linearen Algebra	227
7.7	Lösungsverfahren für Bandmatrizen	227
7.8	Pseudolösungen	228
7.9	Interpolation	229
7.9.1	Klassische Interpolation	230
7.9.2	Spline-Interpolation	232
7.9.3	BÉZIER-Kurven	235
7.10	Numerische Differenziation	237
8	Statistik	239
8.1	Wahrscheinlichkeitsrechnung	239
8.1.1	Grundbegriffe	239
8.1.2	Diskrete Verteilungen	249
8.1.3	Stetige Verteilungen	261
8.2	Beschreibende (deskriptive) Statistik	272
8.2.1	Univariate Datenanalyse	272
8.2.2	Bi- und multivariate Datenanalyse	289
8.2.3	Maß- und Indexzahlen	303
8.2.4	Bestands- und Bewegungsmasse	306
8.2.5	Zeitreihenanalyse	310
8.3	Schließende (induktive) Statistik	320
8.3.1	Grundgesamtheit und Stichprobe	320
8.3.2	Statistische Schätzverfahren	323
8.3.3	Statistische Tests	327
9	Operations Research	334
9.1	Spezielle Probleme der linearen Optimierung	334
9.1.1	Transportproblem	334
9.1.2	Zuordnungsproblem	338
9.2	Rundreiseproblem (Traveling-Salesman-Problem)	342
9.3	Reihenfolgemodelle	344
9.3.1	Algorithmus von JOHNSON-BELLMAN	345
9.3.2	Zeilenbewertungsverfahren ($n \geq 3$)	347
9.4	Netzplanmodelle	348
9.4.1	Einführung	348
9.4.2	Zeitplanung nach Critical Path Method (CPM)	350

9.5	Standortproblem	354
9.6	Lagerhaltung	356
9.6.1	Einführung	356
9.6.2	Deterministische Modelle	357
9.6.3	Stochastische Modelle	361
9.7	Standardmodell für offene Wartesysteme	363
9.8	Simulationsmodelle	365
9.8.1	Ziele und Verfahren der Simulation	365
9.8.2	Erzeugung von Zufallszahlen	367
9.8.3	Deterministische Simulation	371
9.8.4	Stochastische Simulation	373
Tafeln	376
T1	Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung	376
T2	Quantile $t_{M;q}$ der t -Verteilung mit M Freiheitsgraden	377
T3	Quantile $\chi_{M;q}^2$ der χ^2 -Verteilung mit M Freiheitsgraden	378
T4	Zinsberechnungsmethoden (Überblick)	379
T5	Ausgewählte Integrale	380
Literaturverzeichnis	383
Sachwortverzeichnis	386

Besitzt die zulässige Basislösung eines linearen Optimierungsproblems in der 1. Normalform genau m positive Komponenten, wird sie **nicht ausgeartet** genannt. Besitzt die zulässige Basislösung weniger als m positive Komponenten, wird sie **ausgeartet** genannt.

Bemerkung

Im Falle einer Ausartung können beim Lösungsprozess Komplikationen auftreten (Zyklenbildung).

2.6.3 Simplexmethode

Mit der Simplexmethode kann ein lineares Optimierungsproblem rechnerisch schrittweise gelöst werden. Dazu wird hier die **kombinierte Simplexmethode** als Simplexalgorithmus vorgestellt. Voraussetzung ist das Vorliegen des linearen Optimierungsproblems in der 1. Normalform.

Die Aufgabe besteht darin, zulässige Basislösungen zu finden, in denen die Zielfunktion ihr Maximum annimmt.

Nebenbedingungen in Form von Gleichungen werden in der 1. Normalform mit der M -Methode berücksichtigt. In diese Gleichungen werden **künstliche** oder **Sternvariable** x_j^* eingeführt, die gemeinsam mit den Schlupfvariablen die Basisvariablen der ersten Basislösung sind.

Die ursprünglichen Gleichungen sind nur dann erfüllt, wenn die künstlichen Variablen null sind. Das kann erreicht werden, wenn beim Variablentausch in der Basistransformation die künstlichen Variablen von Basisvariablen zu Nichtbasisvariablen getauscht werden.

In der Zielfunktion erhalten die künstlichen Variablen einen sehr großen negativen Koeffizienten $-M$, M ist sehr groß positiv, $M \gg 0$.

Besitzt das lineare Optimierungsproblem eine optimale Lösung, nimmt die Zielfunktion ihr Extremum in mindestens einer zulässigen Basislösung der Menge der zulässigen Lösungen an (Eckpunkt des konvexen Bereiches B).

Ist die Menge B der zulässigen Lösungen nicht leer und die Zielfunktion über B nach oben beschränkt, existiert bei einer Maximumaufgabe wenigstens eine optimale Lösung (Simplextheorem).

Das Ausgangsschema enthält mit dem Koordinatenursprung in der Regel nicht die optimale Lösung. Negative g -Werte deuten an, dass noch keine maximale Lösung vorliegt, negative b -Werte zeigen, dass noch keine zulässige Lösung vorliegt.



Ein Schema enthält eine optimale Lösung, wenn die Werte sowohl in der g -Zeile als auch in der b -Spalte nichtnegativ sind.

Für eine **optimale Lösung** gilt: $g_j \geq 0 \forall j$ und $b_i \geq 0 \forall i$.

Schritte des Simplexalgorithmus

1. Zunächst wird über die **Simplexmethode** (SM), Schritt (1.1) des Algorithmus, versucht, $g_j \geq 0$ zu erreichen.
2. Falls erforderlich, wird anschließend über die **duale Simplexmethode** (DSM), Schritt (1.2) des Algorithmus, versucht, $b_i \geq 0$ zu erreichen.
3. Ob **mehrere optimale Lösungen** existieren, ist gegebenenfalls im Schritt (3) zu prüfen.

Ist die Menge der zulässigen Lösungen beschränkt, und nimmt die Zielfunktion ihren Optimalwert in mehr als einem Eckpunkt (ZBL) an, ist die Gesamtheit der Optimallösungen eine **konvexe Linearkombination** aller optimalen Basislösungen:

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \dots + t_n \mathbf{x}_n \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n t_i = 1 \quad \text{und} \quad t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$$

Ist das lineare Optimierungsproblem nicht ausgeartet, führt die Simplexmethode **nach endlich vielen Schritten** zur Optimallösung oder zur Erkenntnis der Unlösbarkeit der Aufgabe.

Ausführliches Schema für die Simplexmethode (einschl. der BV-Spalten)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5	x_6	x_7	b
x_5	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}		1	0	0	b_1
x_6	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}		0	1	0	b_2
x_7	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}		0	0	1	b_3
Z	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$		0	0	0	0

Als Rechenschema wird das **verkürzte** Schema (siehe folgende Seite) verwendet, dabei wird auf die Spalten der Basisvariablen mit den Einheitsvektoren verzichtet. In der dadurch freien Spalte der neuen Basisvariablen wird die Spalte der neuen Nichtbasisvariablen positioniert. Es ist somit zu beachten, dass sich die Rechenregeln im Schritt (2) **Verkürzte Basistransformation** für die **Werte in der Hauptspalte** (1. Das Hauptelement HE und 3. Die restlichen Elemente der Hauptspalte) gegenüber der ausführlichen Basistransformation (Abschnitt 2.3.5) **verändern**.

Bemerkung

In den Spalten der BV steht immer die Einheitsmatrix E . Im folgenden **verkürzten Schema** werden diese Spalten der BV weggelassen. Dafür ändern sich die Regeln für die HS einschließlich des HE.

Verkürztes Schema als Ausgangsschema für die kombinierte Methode

Die Spalten für die Basisvariablen entfallen, die letzte Nebenbedingung wird beispielhaft als Gleichung angenommen.

1.	NBV	x_1	x_2	x_3	x_4	\mathbf{b}	
BV	-1	c_1	c_2	c_3	c_4	0	q
x_5	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	q_1
x_6	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	q_2
x_7^*	$-M$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3	q_3
	\mathbf{g}	$g_1:$	$g_2:$	$g_3:$	$g_4:$	Z:	0
	*	$-c_1$ $-a_{31}$	$-c_2$ $-a_{32}$	$-c_3$ $-a_{33}$	$-c_4$ $-a_{34}$	$-b_3$	
	p	p_1	p_2	p_3	p_4		

Koeffizienten der Zielfunktion

Die Koeffizienten in der Zielfunktion sind für Schlupfvariable null und für künstliche Variable $-M$ (M ist eine sehr große positive Zahl, $M \gg 0$).

Berechnung der g -Zeile

- (1) Die g_j und Z ergeben sich aus dem Skalarprodukt der 2. Spalte (NBV) mit den entsprechenden Spalten von \mathbf{A} und \mathbf{b} .
- (2) Die *-Zeile entfällt, wenn sich unter den Basisvariablen keine *-Variable befinden.

Sind *-Variable unter den Basisvariablen, so besteht der g -Wert aus einem M -freien und einem M -behafteten Bestandteil.

Die Koeffizienten der M -Bestandteile werden in die *-Zeile geschrieben und entscheiden somit über Vorzeichen und Größe der g -Werte.

z. B.: $g_1 = -c_1 - a_{31}M$, $g_2 = -c_2 - a_{32}M$ oder $Z = 0 - b_3M$

p -Zeile: Die p -Zeile kann zunächst entfallen, sie wird nur bei Anwendung von Schritt (1.2) notwendig.

BT: Die Rechenvorschriften der verkürzten Basistransformation gelten nur innerhalb des verstärkten Rahmens.

Probe: In den Folgeschemata werden die Werte in der g -Zeile mit der verkürzten Basistransformation im Schritt (2) berechnet, können zur Kontrolle aber auch wieder als Skalarprodukt der 2. Spalte mit der entsprechenden Spalte berechnet werden.



Simplexalgorithmus mit den Schritten (1), (2) und (3)

(1) Bestimmen des Hauptelementes (HE)

(1.1) Auswerten der g -Zeile (**SM**): Gibt es $g_j < 0$?

NEIN: \rightarrow (1.2)

JA: Suche $\min g_j = g_s$, s -Spalte wird Hauptspalte (HS)

Bilde für die nichtnegativen Elemente der b -Spalte und die positiven Elemente der HS die Quotienten $q_i = b_i/a_{is}$

Existieren ein oder mehrere Quotienten q_i ?

NEIN: Sind alle $b_i \geq 0$?

NEIN: \rightarrow (1.2)

JA: ZBL nicht optimal. Abbruch!

JA: $\min q_i = q_r$, r -Zeile wird Hauptzeile (HZ) \rightarrow (2)

(1.2) Auswerten der b -Spalte (**DSM**): Gibt es $b_i < 0$?

NEIN: Die ZBL ist optimal.

Gibt es $g_j = 0$?

NEIN: \rightarrow | **ENDE**, Angabe der Lösung! |

JA: Mehrere optimale Lösungen möglich \rightarrow (3)

JA: Suche $\min b_i = b_r$, r -Zeile wird Hauptzeile (HZ)

Bilde für die nichtnegativen Elemente der g -Zeile und die negativen Elemente der HZ die Quotienten $p_j = g_j/-a_{rj}$

Existieren ein oder mehrere Quotienten p_j ?

NEIN: BL nicht zulässig. Abbruch!

JA: $\min p_j = p_s$, s -Spalte wird Hauptspalte (HS) \rightarrow (2)

(2) Verkürzte Basistransformation (für a'_{rs} , a'_{ij} , b'_i , g'_j und Z')

0. Die BV aus der Hauptzeile wird mit der NBV aus der Hauptspalte vertauscht (einschließlich der Koeffizienten der Zielfunktion).

Falls eine *-Variable NBV wird, ist die entsprechende Spalte zu streichen.

Ist keine *-Variable mehr unter den BV, entfällt die *-Zeile in der g -Zeile.

1. Das Hauptelement a_{rs} wird durch den Kehrwert ersetzt $a'_{rs} = 1/a_{rs}$.

2. Die restlichen Elemente der Hauptzeile werden durch a_{rs} dividiert.

3. Die restlichen Elemente der Hauptspalte werden durch $-a_{rs}$ dividiert.

4. Alle übrigen Elemente werden nach folgender Regel ermittelt

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}a_{is}}{a_{rs}} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}} \quad g'_j = g_j - \frac{a_{rj}g_s}{a_{rs}} = \frac{g_j a_{rs} - a_{rj}g_s}{a_{rs}}$$

$$b'_i = b_i - \frac{b_r a_{is}}{a_{rs}} = \frac{b_i a_{rs} - a_{rj} b_r}{a_{rs}} \quad Z' = Z - \frac{b_r g_s}{a_{rs}} = \frac{Z a_{rs} - b_r g_s}{a_{rs}}$$

5. \rightarrow (1.1) **Hinweis:** Die Abkürzungen sind auf Seite 89 erklärt.

(3) Mehrere optimale Lösungen

Nullen in der **g**-Zeile deuten auf mögliche weitere optimale Basislösungen hin und bestimmen die Wahl einer neuen Hauptspalte (HS).

Wähle eine Null, die nicht gerade gewählt wurde → Hauptspalte.

Bilde für die nichtnegativen Elemente der **b**-Spalte und die positiven Elemente der HS die Quotienten $q_i = b_i/a_{is}$. Existieren ein oder mehrere Quotienten q_i ?

NEIN: Das LOP hat keine weitere optimale BL.

JA: $\min q_i = q_r$, r -Zeile wird Hauptzeile → (2)



Beispiel 2.49 Rechnerische Lösung zum Beispiel 2.44

2. Normalform

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}) &= x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ 4x_1 + 8x_2 &\leq 200 \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 200 \\ 5x_2 &\leq 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Normalform

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}) &= x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 &= 200 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 &= 200 \\ 5x_2 + x_5 &= 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösungsschema

1	NBV	x_1	x_2	\mathbf{b}	
BV	-1	1	4	0	q
x_3	0	4	8	200	25
x_4	0	5	4	200	50
x_5	0	0	5	100	20 ←
	g	-1	-4 ↑	0	
2	NBV	x_1	x_5	\mathbf{b}	
BV	-1	1	0	0	q
x_3	0	4	-8/5	40	10 ←
x_4	0	5	-4/5	120	24
x_2	4	0	1/5	20	-
	g	-1 ↑	4/5	80	
3	NBV	x_3	x_5	\mathbf{b}	
BV	-1	0	0	0	q
x_1	1	1/4	-2/5	10	
x_4	0	-5/4	6/5	70	
x_2	4	0	1/5	20	
	g	1/4	2/5	90	

Im verstärkten Rahmen gelten die Rechenvorschriften der verkürzten BT, Schritt (2).

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Die Lösung im dritten Schema ist optimal, weil sowohl die **g**-Zeile als auch die **b**-Spalte nur noch positive Werte enthalten. Der optimale Punkt liegt bei $x_1 = 10$, $x_2 = 20$. $Z(\mathbf{x})$ hat einen maximalen Wert von $Z_{\max} = 90$.

Beispiel 4.7

Ein Kapital von 1 000 € wird 5 Jahre und 9 Monate zu einem nominellen Zinssatz von 4 % p. a. angelegt. Wie hoch wäre das Endkapital

- (1) bei gemischter Verzinsung (jährliche Zinsgutschrift),
- (2) bei vierteljährlicher Zinsgutschrift,
- (3) bei monatlicher Zinsgutschrift,
- (4) bei kontinuierlicher Verzinsung?

Lösung

Bei dem Problem (1) ist zu berücksichtigen, dass 5 Jahre die Zinseszinsrechnung und 9 Monate die einfache Zinsrechnung angewandt werden muss.

$$(1) \quad K_{5,75} = 1\,000 \cdot (1 + 0,04)^5 \cdot \left(1 + \frac{9}{12} \cdot 0,04\right) \approx 1\,253,15$$

$$(2) \quad K_{5,75} = 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{5,75 \cdot 4} \approx 1\,257,16$$

$$(3) \quad K_{5,75} = 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{5,75 \cdot 12} \approx 1\,258,12$$

$$(4) \quad K_{5,75} = 1\,000 \cdot e^{0,04 \cdot 5,75} \approx 1\,258,60$$

4.3 Rentenrechnung**Rentenendwert**

Eine **Rente** ist eine feste Zahlung E , die zu bestimmten Zeitpunkten (in der Regel am Anfang oder Ende einer Zinsperiode oder Unterperiode) geleistet wird.

Der **Rentenendwert** R_n stellt den Gesamtbetrag aller Zahlungen E einschließlich Zinsen nach n Perioden mit $K_0 = 0$ dar.

Es gilt mit $q = 1 + i$ (Aufzinsfaktor):

(1) Zinsperiode = Zahlungsperiode, konstante Einzahlung E

vorschüssig: (V1)

$$R_n^{(V)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q \cdot E$$

nachschüssig: (N1)

$$R_n^{(N)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot E$$

Beispiel 4.8

Ein Rentenbeitrag von 4 000 € wird jährlich 20 Jahre lang a) zu Beginn eines jeden Jahres, b) am Ende eines jeden Jahres geleistet. Wie hoch ist der Rentenendwert nach 20 Jahren, wenn ein Zinssatz von 6 % p. a. vorausgesetzt wird?

Lösung

$$p = 6, E = 4\,000, q = 1 + i, i = \frac{p}{100} = 0,06, n = 20$$

$$\text{a) } R_{20}^{(V)} = \frac{1,06^{20} - 1}{1,06 - 1} \cdot 1,06 \cdot 4\,000 \approx 155\,970,91$$

Bei vorschüssiger Zahlungsweise beträgt der Rentenendwert nach 20 Jahren 155 970,91 €.

$$\text{b) } R_{20}^{(N)} = \frac{1,06^{20} - 1}{1,06 - 1} \cdot 4\,000 \approx 147\,142,36$$

Bei nachschüssiger Zahlungsweise beträgt der Rentenendwert dagegen 147 142,36 €.


(2) Zinsperiode > Zahlungsperiode, konstante Einzahlung C

vorschüssig: (V2)

nachschüssig: (N2)

$$R_n^{(V)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \left(m + i \cdot \frac{m+1}{2} \right) \cdot C$$

$$R_n^{(N)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \left(m + i \cdot \frac{m-1}{2} \right) \cdot C$$

Die Einzahlung E wird hier durch die entsprechende Formel für die einfache Zinsrechnung ersetzt (vgl. Abschnitt 4.1). Zu beachten ist, dass dieser Betrag erst am Ende des Jahres entsteht und somit von der Formel (N1) auszugehen ist.

Beispiel 4.9

Wird eine Rente von 600 € ab Januar am Anfang (Ende) eines jeden Monats 10 Jahre lang bezahlt und wird das Kapital jährlich zu 6 % verzinst (Zinseszins), so ergeben sich wegen $C = 600$, $n = 10$, $i = 0,06$ folgende Rentenendwerte

$$\text{a) vorschüssig: } R_{10}^{(V)} = \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} \cdot (12 + 0,06 \cdot 6,5) \cdot 600 \approx 97\,986,03 \text{ €}$$

$$\text{b) nachschüssig: } R_{10}^{(N)} = \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} \cdot (12 + 0,06 \cdot 5,5) \cdot 600 \approx 97\,511,52 \text{ €}$$

Barwert einer Rente

Als **Barwert einer Rente** wird der Betrag B bezeichnet, der zu Beginn aufgebracht werden muss, um n Perioden lang eine Rente E zu erhalten.

Der **Barwert** kann aus den Formeln (V1) und (N1) bzw. (V2) und (N2) berechnet werden, indem durch q^n dividiert wird.

(1) Zinsperiode = Zahlungsperiode, konstante Einzahlung E

vorschüssig:

$$B^{(V)} = \frac{q^n - 1}{q^{n-1} \cdot i} \cdot E$$

nachschüssig:

$$B^{(N)} = \frac{q^n - 1}{q^n \cdot i} \cdot E$$

(2) Zinsperiode > Zahlungsperiode, konstante Einzahlung C

vorschüssig:

$$B^{(V)} = \frac{q^n - 1}{q^n \cdot i} \cdot \left(m + i \cdot \frac{m+1}{2} \right) \cdot C$$

nachschüssig:

$$B^{(N)} = \frac{q^n - 1}{q^n \cdot i} \cdot \left(m + i \cdot \frac{m-1}{2} \right) \cdot C$$

Beispiel 4.10

Welcher einmalige Betrag müsste eingezahlt werden, um 10 Jahre lang einen monatlichen Rentenbetrag von 600 € zu erhalten, wenn ein Zinssatz von 6 % p. a. zugrunde gelegt wird und im Januar mit der Zahlung begonnen werden soll?

Lösung

Gesucht ist der Barwert.

Bei vorschüssiger Zahlungsweise (am Beginn jeden Monats) ist die folgende einmalige Einzahlung erforderlich:

$$B^{(V)} = \frac{1,06^{10} - 1}{1,06^{10} \cdot 0,06} \cdot (12 + 0,06 \cdot 6,5) \cdot 600 \approx 54\,714,89 \text{ €} \quad (\text{vorschüssig})$$

Erfolgt dagegen die Zahlung jeweils erst am Ende eines jeden Monats, ist der folgende Betrag einmalig einzuzahlen:

$$B^{(N)} = \frac{1,06^{10} - 1}{1,06^{10} \cdot 0,06} \cdot (12 + 0,06 \cdot 5,5) \cdot 600 \approx 54\,449,92 \text{ €} \quad (\text{nachschüssig})$$

Raten-Renten-Formeln (Sparkassenformeln)

Es sei ein **Anfangskapital** K_0 gegeben, das in jeder Zinsperiode (Monat, Quartal, Jahr usw.) um einen gleich bleibenden Betrag E erhöht oder verringert wird. Dann beträgt das Kapital K_n nach n Zinsperioden:

vorschüssig: (V3)

$$K_n^{(V)} = K_0 \cdot q^n + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q \cdot E$$

nachschüssig: (N3)

$$K_n^{(N)} = K_0 \cdot q^n + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot E$$

Beispiel 4.11

Ein Betrag von 5 000 € wird zu einem Zinssatz von 6,5 % p. a. angelegt. Eine Einzahlung von 200 € wird jeweils am Ende (1) bzw. am Anfang (2) jeden Jahres geleistet. Welcher Endbetrag steht nach 10 Jahren zur Verfügung (Zinseszins)?

Lösung

$$K_0 = 5\,000, i = 0,065, n = 10, E = 200, q = 1 + i = 1,065$$

(1) nachschüssige Zahlungsweise:

$$\begin{aligned} K_n^{(N)} &= K_0 \cdot q^n + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot E \\ &= 1,065^{10} \cdot 5\,000 + \frac{1,065^{10} - 1}{0,065} \cdot 200 \approx 12\,084,57 \text{ €} \end{aligned}$$

Das Kapital beträgt nach 10 Jahren 12 084,57 €.

(2) vorschüssige Zahlungsweise:

$$\begin{aligned} K_n^{(V)} &= K_0 \cdot q^n + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q \cdot E \\ &= 1,065^{10} \cdot 5\,000 + \frac{1,065^{10} - 1}{0,065} \cdot 1,065 \cdot 200 \approx 12\,260,00 \text{ €} \end{aligned}$$

Das Kapital ist nach 10 Jahren auf 12 260 € angewachsen.

Liegt der Fall einer **gemischten Verzinsung** vor, d. h., wird eine Periode noch in m weitere Unterperioden unterteilt (z. B.: ein Jahr in Monate oder Quartale), in denen nur einfache Verzinsung erfolgt, so gilt:

$$K_n^{(V)} = K_0 \cdot q^n + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \left(m + i \cdot \frac{m + 1}{2} \right) \cdot C \quad (\text{vorschüssig})$$

$$K_n^{(N)} = K_0 \cdot q^n + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \left(m + i \cdot \frac{m - 1}{2} \right) \cdot C \quad (\text{nachschüssig})$$

Da das in den Unterperioden entstandene Kapital S_m erst am Ende einer Zinsperiode vorliegt, trifft die Formel (N3) zu.

Beispiel 4.12

Auf ein Sparkonto, auf dem sich schon 1 000 € befinden, werden 10 Jahre lang zum Ende eines jeden Monats 100 € eingezahlt.

Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 10. Jahres (Zinsen 6 % p. a.)?

Lösung

Gemischte Verzinsung, nachschüssig.

Es gilt: $K_0 = 1\,000$, $C = 100$ €, $m = 12$ (Monate), $n = 10$, $i = 0,06$, $q = 1,06$

$$K_n^{(N)} = K_0 \cdot q^n + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \left(m + i \cdot \frac{m - 1}{2} \right) \cdot C$$

$$K_{10}^{(N)} = 1,06^{10} \cdot 1\,000 + \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} \cdot (12 + 0,06 \cdot 5,5) \cdot 100 \approx 18\,042,77 \text{ €}$$

4.4 Tilgungsrechnung

Ratentilgung

Zur Tilgung einer Schuld K_0 , die zu einem Zinssatz p ausgeliehen ist, werden für eine fest vereinbarte Laufzeit von n Jahren konstante Tilgungsraten Q gezahlt, die die fälligen Zinsen Z_k für das k -te Jahr nicht beinhalten. Dabei gilt:

$$Q = \frac{K_0}{n}$$

$$Z_k = [K_0 - (k - 1) \cdot Q] \cdot i$$

Die Summe aus der Tilgungsrate Q und den anfallenden Zinsen Z_k $A_k = Q + Z_k$ wird als **Annuität** bezeichnet.

Bemerkung

Bei der Ratentilgung bleibt die Tilgungsrate Q für die gesamte Laufzeit **konstant**, während die Annuität **monoton fällt**.

Annuitätentilgung

Zur Tilgung einer Schuld K_0 , die zu einem Zinssatz p ausgeliehen ist, wird über eine fest vereinbarte Laufzeit am Anfang oder am Ende jeder Zinsperiode ein **gleich bleibender Betrag** E bezahlt. Dieser wird als **Annuität** bezeichnet und setzt sich aus der Tilgungsrate T und den Zinsen Z zusammen: $A = T + Z$.

Da die Schuld nach n Perioden vollständig beglichen werden soll, wird $K_n = 0$ gesetzt (siehe Abschnitt 4.3).

Die Annuität $A = -E$ kann über (V3) bzw. (N3) berechnet werden.

vorschüssig:

$$A^{(V)} = q^{n-1} \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} \cdot K_0$$

nachschüssig:

$$A^{(N)} = q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} \cdot K_0$$

Sachwortverzeichnis

A

Abbildung 16
–, bijektive 16
–, eindeutige 16
–, inverse 16
–, surjektive 16
Abbruchfehler 215
Abgangsmasse 306
Ableitung 158
– höherer Ordnung 161
–, partielle 203
– von Grundfunktionen 159
Abschreibung 143
Abschreibungsprozentsatz 144
Abschreibungsrate 146
Abschreibungsrechnung 143
Absolutbetrag 26
absolute Häufigkeit 242
absoluter Fehler 161
Absolutskala 273
Abstand 219
Abzinsung 131
Achsenabschnittsform 41
Addition 20
–, inverses Element 21
–, Matrizen 60
Additionssatz für unabhängige Ereignisse 248
Adjazenzmatrix 350
Adjunkte 54
Algebra 37, 53
–, Fundamentalsatz 37
–, lineare 53
Algorithmus
–, Euklidischer 20
–, Gauss- 72
–, Johnson-Bellman- 345
–, Simplex- 102
Anfangskapital 126
Animation 366
Annuitätenmethode 140
Annuitätenschuld 149
Annuitätentilgung 138

Ansatz 24, 191 f., 194, 197, 199
Anzahl der Zinstage 127
Approximation 230
Äquivalenz 17
Argument 45
arithmetisches Mittel 278
Assoziativgesetz 20, 62
Asymptote 155
Aufzinsfaktor 126, 134
Aufzinsung 131
Ausartung 101, 335, 338 f.
Aussage 17
Aussagenlogik 17
Aussagenverbindung 17
Axiom 20, 243

B

Bandmatrix 227
Barwert 126 f., 131, 135
Basis 21, 100
Basisdarstellung 100
Basislösung 100
–, ausgeartete 101
–, zulässige 100
Basisperiode 303
Basistransformation 78, 90, 102
–, ausführliche 78, 102
–, verkürzte 102
Basisvariable 78, 100
Bayessche Formel 247
Beckersches Schema 306
Bedienungssystem 363
bedingte Häufigkeitsverteilung 291
bedingte Wahrscheinlichkeit 245
Benford-Menge 259
Benford-Verteilung 259
Berichtsperiode 303
Bernoulli-L'Hospitalsche Regel 168
Bernoullisches Versuchsschema 253
Bernstein-Polynom 235
beschreibende Statistik 272
Bestandsdiagramm 307
Bestandsfortschreibung 307

- Bestandsmasse 306
Bestellmenge 356
Bestellniveau 360
Bestimmtheitskoeffizient 295
Bestimmtheitsmaß 295
Betrag 26, 45
Bewegungsmasse 306
Beziehungszahl 303
Bezier-Kurve 235
bijektiv 16
Binom 27
Binomialkoeffizient 27
Binomialverteilung 253
Binomische Formeln 22
Binomischer Satz 46
bivariate Häufigkeitsverteilung 289
Blockmatrix 60
Boxplot 282
Branch-and-Bound-Methode 343
Bruch 22
Bruchgleichung 37
Buchwert 144
- C**
Cantor-Menge 15
charakteristische Gleichung 67
Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest 331
 χ^2 -Verteilung 378
Computerzahl 216
Cramér, Maß 301
Cramersche Regel 58
Critical Path Method 350
- D**
Darstellung komplexer Zahlen 45
Datenanalyse
–, bi- und multivariate 289
–, univariate 272
Datenfehler 215
de Moivre-Laplace
–, Grenzwertsatz 271
Defekt 229
definit
–, negativ 208
–, positiv 208
Definitionsbereich 16
Determinante 53
Dezilabstand 278
Dezimalsystem 19
Diagonalmatrix 65
Dichtefunktion 261
Differenz 21
Differenzenausdrücke 237
Differenzengleichung 195
Differenzenquotient 158
Differenzial
–, totales 161, 205
–, vollständiges 205
Differenzialgleichung 188
–, lineare 190, 192
–, separable 188
Differenzialquotient 158
Differenziation
–, logarithmische 160
–, numerische 237
Differenziationsregeln 159
Differenzmenge 15
disjunkte Menge 15
Disjunktion 17
diskontierter Wert 131
Diskordanz 300
diskrete Verteilung 249, 253
diskrete Zufallsvariable 248
Distributivgesetz 21, 62
divergent 154
Dividend 21
Division 21
–, algebraische Summe 23
Divisor 21
Doppelsumme 27
Doppel- t -Test 330
Drehstreckung 48
Dreieck 42
duale Zahl 20
Dualität 108
Dualsystem 19
Durchschnitt 15
–, gleitender 311, 313
- E**
Eigenvektor 67
Eigenverbrauch 86
Eigenwert 67
einfacher Gauss-Algorithmus 72
Einheitsmatrix 65
Einschwingphase 374
Einselement 21
Elastizität 165, 205
–, partielle 206
–, relative 165, 189, 206

- Element 15
 Elementarereignis 242
 Eliminationsverfahren 72
 empirische Standardabweichung 282
 empirische Varianz 282
 empirische Verteilungsfunktion 274 f.
 empirischer Variationskoeffizient 282
 Endkapital 126 f.
 Endwert 126 f.
 Entscheidungsvariable 93
 Entwicklungssatz von Laplace 55
 Ereignis
 –, abhängiges 247
 –, atomares 242
 –, Elementar- 242
 –, komplementäres 240, 242 f.
 –, Produkt 240
 –, sicheres 239, 242
 –, Summe 240
 –, unabhängiges 247
 –, unmögliches 239, 242
 –, unvereinbares, unverträgliches 240
 –, zufälliges 239
 –, zusammengesetztes 242
 Ereignisfeld 242
 –, Laplacesches 244
 Ereignismasse 306
 Erlösfunktion 187
 Erwartungswert 250, 262
 erweitern 22, 33
 Euklidischer Abstand 219
 Euklidischer Algorithmus 20
 Eulersche Form 45
 Eulersche Formel 45
 Eulersche Zahl 34, 118, 121, 155, 256
 Exponent 21, 33
 Exponentialform 45
 Exponentialfunktion 118
 Exponentialgleichung 38
 Exponentialverteilung 265
 exponentielle Glättung 313, 315
 Extremum 171
 Extremwertbestimmung 206
 Extremwerte 170, 207
 – mit Nebenbedingungen 209
 Exzess 263
- F**
- Faktor 21
 Fakultät 27
 Falksches Schema 61
 Fehler
 –, absoluter 161, 205
 –, relativer 161, 205
 Fehleranalyse 217
 Fehlerarten 215, 327
 Fehlerformel 161, 205
 Fehlerrechnung 161, 205
 Fehlmengen 360
 Fischer-Kriterien 323
 Fixpunkt 222
 Fixpunktiteration 222, 225
 Folge 120
 –, alternierende 121
 –, arithmetische 120
 –, divergente 121
 –, geometrische 120
 –, konstante 120
 –, konvergente 121
 Format einer Matrix 59
 Formel
 –, Bayessche 247
 –, Eulersche 45
 –, Moivresche 50
 –, Stirlingsche 27
 Freiheitsgrad 80
 Fundamentalsatz der Algebra 37
 Funktion 16, 111
 –, äußere 116
 –, echt gebrochenrationale 24
 –, ganzrationale 115, 117 f.
 –, gebrochenrationale 116
 –, gerade 114
 –, identische 116
 –, innere 116
 –, inverse 114
 –, konkave 114
 –, konvexe 114
 –, lineare 117
 –, monotone 113
 –, trigonometrische 43, 119
 –, ungerade 114
 –, verkettete 116
 Funktionalanalysis 219
- G**
- Gantt-Diagramm 346, 354
 ganze Zahl 18
 Gauss-Algorithmus 72, 74, 227
 Gauss-Jordan-Algorithmus 78

Gauss'sche Zahlenebene 44
GE – Geldeinheit 95
Gegenwartswert 141
geometrische Verteilung 258
geometrisches Mittel 279
geordnetes Paar 16
Gerade 41
Gewinnannuität 140
Gewinnfunktion 187
gewöhnliches Moment 253, 263
Gini-Koeffizient 286
gleichartige Matrizen 60
gleichnamiger Bruch 23
Gleichung 34
–, lineare 36
–, quadratische 36
Gleichungssystem
–, homogenes 80
–, inhomogenes 81
–, lineares 53, 69, 71, 227
–, nichtlineares 225
Gleichverteilung 264
Gleitkommazahl 216
Gliederungszahl 302
Gliwenski 321
Gliwenski'scher Satz 321
Gomperz-Funktion 296
Gradient 204
Grenzfunktion 158, 163
Grenzwert 121
– einer Folge 121
– einer Funktion 153
– einer Reihe 123
–, linksseitiger 154
–, Rechenregeln 155
–, rechtsseitiger 154
Grenzwertsatz
–, Laplace-de Moivre 271
–, Poisson 257
größter gemeinsamer Teiler 23
Grundgesamtheit 320
Grundintegrale 177
Gruppe 274
Gruppierung 274
g-Zeile 103

H

Halbebene 42
harmonisches Mittel 279

Häufigkeiten
–, absolute 242
–, relative 242 f.
Häufigkeitsfunktion 290
Häufigkeitstabelle 273, 289
Hauptabschnittsdeterminante 54, 208
Hauptdiagonale 59
Hauptnenner 23, 37
Hauptsatz der Integralrechnung 180
Hesse-Matrix 204, 208
Hexadezimalsystem 19
Histogramm 275
Hochpunkt 170
Höhe 42
Höhensatz 42
homogenes Gleichungssystem 80
Horner
–, Berechnungsmethode 118
Hyperbel 117
hypergeometrische Verteilung 254
Hypotenuse 42
Hypothese 327

I

Imaginärteil 43
Implikation 17
indefinit 208
Index 304
Indexzahl 302, 304
inhomogenes Gleichungssystem 81
Integral
–, bestimmtes 180
–, Riemannsches 180
–, unbestimmtes 176
–, uneigentliches 182
Integration
–, numerische 184
–, partielle 178 f.
Integrationsregeln 177, 180
Interpolation 229
Intervallararithmetik 217
Intervallschätzung 323
Intervallskala 273
inverse Abbildung 16
inverse Matrix 66, 82
Inversionsmethode 369
Investitionsrechnung 140
irrationale Zahl 18
Irrtumswahrscheinlichkeit 323, 327
Iterationsverfahren 221

J

Jacobi-Matrix 225
Jacobi-Verfahren 223
Johnson-Bellman
–, Algorithmus 345

K

kanonische Form 78
Kapitalrückfluss 140
Kapitalwertmethode 141
kartesische Darstellung 45
kartesisches Produkt 16
Kathete 42
Kehrmatrix 66
Kettenregel 160
Klammer 21
Klasse 274
Klassenanzahl 275
Klassenhäufigkeit 275
kleinstes gemeinsames Vielfaches 23
Kofaktor 54
Kolmogorov 243
Kombination 30
Kombinatorik 29
Kommutativgesetz 21
komplementäres Ereignis 240, 242 f.
Komplementärmenge 15
komplexe Zahl 18, 43
–, Rechenregeln 46
Konditionszahl 217
–, absolute 217
Konfidenzintervall 323
Konfidenzschätzung 323 f.
Kongruenzmethode 367
konjugiert komplexe Zahlen 44
Konjunktion 17
konkav 173
Konkordanz 300
Konkordanzkoeffizient 301
Konsumentenrente 187
Kontingenzkoeffizient 301
Kontingenztafel 289 f., 332
Konvergenzkriterien 124
konvex 173
konvexe Linearkombination 88, 97
konvexe Punktmenge 88
Konzentrationskoeffizient 286
Konzentrationsmaß 286
Korrelationskoeffizient 292
Korrelationsrechnung 292

Korrelationstabelle 289, 294
Kosinussatz 43
Kostenfunktion 186
Kovarianz 292
Kreuzmenge 16
Kreuzprodukt 16
Kreuztafel 289 f., 332
Krümmungsverhalten 173
Kuponanleihe 151
Kurs 149
Kursrechnung 148
Kurvendiskussion 173
kürzen 22, 28

L

Lageparameter 277
Lagerbestand 356
Lagerhaltung 356
Lagrange
–, Multiplikatorenmethode 210
Laplace
–, Entwicklungssatz 55
–, Ereignisfeld 244
–, Grenzwertsatz 271
Laspeyres-Index 304
Leibniz-Kriterium 124
Leibnizsche Zinseszinsformel 131
Leontief-Modell 86
L'Hospitalsche Regel 168
linear abhängig 69
linear unabhängig 69
lineare Algebra 53
lineare Gleichung 36
lineare Optimierung 93
lineares Ungleichungssystem 87
Linearkombination 69, 202
–, konvexe 88, 97
Logarithmengleichung 39
Logarithmus 32 f.
–, dekadischer 118
–, natürlicher 118
Logarithmusfunktion 118
logistische Funktion 296, 312
Lorenz-Fläche 286
Lorenz-Kurve 286
Losgröße 174
Lösung
–, allgemeine zulässige 89
–, grafische 89, 94

–, verallgemeinerte 229
–, zulässige 88, 94
Lösungsmenge 35

M

Manhattan-Abstand 219
Marginalanalyse 163
marginale Klasse 290
Marginalfunktion 158, 163
Markov-Kette 65
Maß von Cramér 301
Maßzahl 302
Matrix 59
–, diagonaldominante 223
–, Format 59
–, gestürzte 59
–, gleichartige 60
–, Hauptdiagonale 59
–, inverse 66
–, Multiplikation 61
–, Nebendiagonale 59
–, orthogonale 65
–, positiv definite 208
–, reguläre 66
–, reziproke 66
–, singuläre 66
–, Spur 59
–, symmetrische 59
–, transponierte 59
–, Typ 59
–, verkettete 61
Matrizengleichung 84
Maximum 171
–, absolutes 171
–, relatives 170, 206
Maximum-Abstand 219
Maximum-Likelihood-Schätz-
methode 323
Maximumnorm 220
Median 277
Menge 15
–, Differenz- 15
–, disjunkte 15
–, Durchschnitt 15
–, komplementäre 15
–, leere 15
–, Vereinigung 15
Mengenindex 305
Mengenoperation 15

Merkmal
–, diskretes 272
–, stetiges 272
Merkmalswert 272
Messzahl 303
Methode der kleinsten Quadrate 210,
230
Minimum 171
–, absolutes 171
–, relatives 170, 206
Minor 54
Minuend 21
Mittel
–, arithmetisches 278
–, geometrisches 279
–, gewichtetes 278
–, harmonisches 279
Mittelwertsatz 170
mittlere absolute Abweichung 280
mittlere quadratische Abweichung 281
mittlere Verweildauer 308
Modalwert 277
Modellierungsfehler 215
Modul 34, 45
Modus 277
Moivresche Formel 50
Moment
–, gewöhnliches 253, 263
–, zentrales 253, 263
monoton 170
Monte-Carlo-Methode 367
multiple Korrelation 298
multiple Regression 298
multipler Korrelationskoeffizient 298
multiples Bestimmtheitsmaß 298
Multiplikation 20
Multiplikation von Matrizen 61
Multiplikationsregel für Wahrschein-
lichkeiten 245
Multiplikationssatz
– für unabhängige Ereignisse 248
Multiplikatorenmethode
–, Lagrangesche 210

N

nachschüssig 128, 136, 138
natürliche Zahl 18
Nebenbedingung 87, 93
Nebendiagonale 59
Negation 17

negativ definit 208
 negative Zahl 18
 Nennwert 148
 Netzplan 348
 –, kritischer Weg 352
 –, Pufferzeiten 353
 –, Vorgangsknotennetz 349
 –, Vorgangspfeilnetz 349
 Newton-Raphson-Verfahren 226
 Newton-Verfahren 166
 nicht ganze Zahl 18
 nicht reelle Zahl 18
 Nichtbasisvariable 78, 100
 nichtlineare Regression 296
 nichtnegative Zahl 18
 Nichtnegativitätsbedingung 93
 Nominalskala 272
 Nominalwert 148
 Nordwestecken-Regel 335
 Norm 220
 –, Euklidische 220
 –, Matrix- 221
 –, Vektor- 220
 Normalform
 –, 1. 88, 99
 –, 2. 87, 99
 Normalverteilung 266
 –, standardisierte 268
 normierter Eigenvektor 67
 n -Tupel 16
 Nullelement 20
 Nullfolge 121
 Nullhypothese 327, 330
 Nullmatrix 60
 Nullteiler 62
 Numerus 33
 Nutzungsdauer 143

O

Oktalsystem 19
 Operation 20
 Operations Research 93, 334
 optimale Lösung 94
 Optimierung 93
 Optimierungsproblem 93
 –, 1. Normalform 99
 –, 2. Normalform 99
 Ordinalskala 272
 orthogonale Matrix 65

P

Paar
 –, geordnetes 16
 –, gleiches 16
 Paasche-Index 304
 Parabel 117
 Partialbruchzerlegung 24
 Partialdivision 23
 Partialsumme 122
 Pascalsches Dreieck 29
 periodische Schwankung 315
 Permutation 29
 Phase 45
 Phasendurchschnittsverfahren 316
 Pivotisierung 227
 Poisson-Verteilung 256
 Polarkoordinaten 45
 Polynom 23, 37, 115, 118
 Polynomdivision 23, 37
 Polynomfunktion 118
 Positionssystem 19
 positiv definit 208
 postnumerando 128
 Potenz 21, 32
 Potenzfunktionen 117
 pränumerando 128
 Preisindex 305
 Produkt 21
 –, kartesisches 16
 Produktmenge 16
 Produktzeichen 26
 Produzentenrente 187
 Progressionsbetrag 147
 progressive Zinsmethode 129
 Protokoll 273
 Pseudolösung 228
 Punkt 41
 –, kritischer 171
 –, stationärer 171, 207
 Punktmenge
 –, konvexe 88
 Punkttrichtungsform 41
 Punktschätzung 323

Q

quadratische Form 208
 quadratische Gleichung 36
 Quadrat-Mitten-Methode 367
 Quantil 263, 278
 Quantile 376 ff.

Quantilsabstand 280
Quartil 278, 283
Quotient 21
Quotientenkriterium 124

R

Rändern 57
Randgerade 42
Randhäufigkeit 290
Randhäufigkeitsfunktion 291
Randklasse 290
Rang 70
Rangkorrelation 299
Rangkorrelationskoeffizient 299
Raten-Renten-Formeln 136
Ratenschuld 150
Ratentilgung 138
rationale Zahl 18
Rationalmachen des Nenners 33
Raum
–, metrischer 220
Reaktionsparameter 314
Realteil 43
Realwert 148
reelle Zahl 18, 20
Regel
–, Bernoulli-L’Hospitalsche 168
–, Cramersche 58
–, Sarrussche 53
Regressionsgerade 293
Regressionsrechnung 293
regulär 66
Reihe 53
–, alternierende 124
–, arithmetische 122
–, endliche 122
–, geometrische 123
–, harmonische 124
–, positive 124
–, unendliche 123
Reihenfolgeproblem 344
Rekonvertierung 20
relative Elastizität 206
relative Häufigkeit 242 f.
relativer Fehler 161
Rente 134
Rentenbarwertfaktor 140, 149
Rentenendwert 134
Resonanzfall 194, 199
Restriktion 87, 93

Restwert 144
reziproke Matrix 66
Rundreiseproblem 342
Rundungsfehler 215

S

Saisonindex 315
Saisonschwankung 315
Sarrussche Regel 53
Satz
– des Euklid 42
– des Pythagoras 42
– von Gliwenko 321
– von Laplace 55
– von Schwarz 204
Schachbrettregel 54
Schattenpreis 109
Schätzverfahren 323
Schema
– von Becker 306
–, von Falk 61
Schiefe 253, 263
schließende Statistik 320
Schlupfvariable 88, 99
Schranke 113
Schwerpunktskoordinaten 355
Sehnen-Trapezregel 184
Servicegrad 361
sicheres Ereignis 239
Sicherheitsbestand 361
Sigma-Regeln 270
Signifikanzniveau 327
Signifikanztest 327
Simplexmethode 101
Simpson-Regel 185
Simulation 365
–, deterministische 371
–, mathematische 366
–, stochastische 373
singulär 66
Sinussatz 43
Skala 272
Skalarprodukt 61
Skalentransformation 272
Skalentyp 272
Skalenwert 272
Spalte 54
Spaltensumme 290
Spaltensummennorm 221
Spannweite 280

- Sparkassenformeln 136
Spearman-Koeffizient 299
spiegeln 55
Splineinterpolation 232
Spur einer Matrix 59
Stabdiagramm 273
Staffelmethode 129
Stammfunktion 176
Standardabweichung 251, 262, 281
standardisierte Normalverteilung 268, 376
Standortproblem 225, 354
Statistik 239
–, beschreibende 272
–, deskriptive 272
–, induktive 320
–, schließende 320
statistische Einheit 272
statistische Maßzahl 277, 292
statistische Momente 253, 263
statistische Sicherheit 327
statistischer Test 327
Steiner-Weber-Problem 354
Sternvariable 99
stetige Verteilung 261
stetige Zufallsvariable 248
Stetigkeit 156
Stichprobe 320
Stichprobenfunktion 321
Stichprobenumfang 320
Stirlingsche Formel 27
Störfunktion 190, 192, 194, 199
Streuungsmaß 280
Streuungszerlegung 295
Strukturmatrix 350
stürzen 55
Substitutionsmethode 177
Subtrahend 21
Subtraktion 21
Summand 21
Summenhäufigkeitsfunktion 275
Summennorm 220
Summenpolygon 276
Summenzeichen 26
surjektiv 16
- T**
Tageszinsen 128
Tangenssatz 43
Tangentenverfahren 166
Tautologie 17
Taylor-Polynom 167
Teilmenge 15
Teilsomme 122
Term 34
–, echt gebrochener 23
–, ganzrationaler 23
–, unecht gebrochener 23
Tiefpunkt 170
Tilgungsrate 138
Tilgungsrechnung 138
Törnquist-Funktion 296
totale Wahrscheinlichkeit 246
transponierte Matrix 59
Transportproblem
–, Ausartung 338
–, gesperrte Verbindungen 338
–, klassisches 334
–, Minimumregel 335
–, Optimalitätskriterium 336
–, Potenzialmethode 336
–, Vogelsche Approximations-
methode 335
Trapezregel 184
Traveling-Salesman-Problem 342
Trendermittlung 311
Trendfunktion 211
Trendparameter 315
Trennen der Veränderlichen 188, 190
Treppenfunktion 249, 273
Tridiagonalmatrix 227
trigonometrische Funktion 43
Tripel 16
triviale Lösung 80
Tschebyscheff-Ungleichung 252, 372
 t -Test 329
 t -Verteilung 377
Typ einer Matrix 59
- U**
Umkehrabbildung 16
Umkehrfunktion 114
Umschlagshäufigkeit 309
ungarische Methode 339
ungleichnamiger Bruch 23
Ungleichung 40
Ungleichungssystem
–, 1. Normalform 88
–, 2. Normalform 87
–, grafisch 89

- , lineares 87
- , normales lineares 87
- univariate Datenanalyse 272
- unmögliches Ereignis 239
- Unstetigkeitsstelle 157
- , hebbare 157
- Unterdeterminante 54
- Untermatrix 60
- Untermenge 15
- Unterperiode 128
- Urliste 273
- V**
- Variable
 - , künstliche 99
 - , Schlupf- 88, 99
- Varianz 250, 262, 281
- Variation 30
- Variation der Konstanten 190
- Variationskoeffizient 281
- Variationsreihe 273
- Vektor 59
- Vennsches Diagramm 15
- Vereinigung 15
- Verfahrensfehler 216
- Verflechtung 1. Art 63, 86
- Verhältnisskala 273
- Verhältniszahl 302
- verkettete Matrizen 61
- verketteter Gauss-Algorithmus 74
- Verkettung 116
- Verknüpfung 115
- verkürzte Basistransformation 104
- Verschiebungssatz 251
- Verteilung
 - , Benford 259
 - , Binomial- 253
 - , diskrete 249, 253
 - , Exponential- 265
 - , geometrische 258
 - , Gleich- 264
 - , hypergeometrische 254
 - , Normal- 266
 - , Poisson- 256
 - , standardisierte Normal- 268
 - , stetige 261
- Verteilungsfunktion 249, 261
- Verteilungsparameter 250
- Verteilungstabelle 249
- Verweildauer 307
- Verweildiagramm 306
- Verzinsung
 - , einfache 126
 - , gemischte 137
 - , stetige 133
 - , unterjährliche 132
- Vietascher Wurzelsatz 37
- Vogelsche Approximationsmethode 335
- vollständiges System 240
- Vollständigkeitsrelation 249, 261
- Vorgangsknotennetz 349
- vorschüssig 128, 136, 138
- W**
- Wachstum
 - , degressives 173
 - , progressives 173
- Wachstumsmodell 189
- Wachstumsrate 164
- Wahrheitswert 17
- Wahrscheinlichkeit 242, 244
 - , bedingte 245
 - , totale 246
- Wahrscheinlichkeitsfunktion 249
- Wahrscheinlichkeitsrechnung 239
- Wartesystem 363
 - , Bediendauer 363
- Wendepunkt 114, 173
 - , horizontaler 172
- Wertebereich 16
- Wertindex 304
- Wertvolumen 304
- Whisker 283
- Winkel 45
- Wölbung 263
- Wurzel 32
- Wurzelfunktion 117
- Wurzelgleichung 38
- Wurzelkriterium 125
- Z**
- Zahl
 - , duale 20
 - , ganze 18
 - , irrationale 18
 - , komplexe 18, 43
 - , konjugiert komplexe 44
 - , natürliche 18
 - , negative 18

- , nicht ganze 18
- , nicht reelle 18
- , nichtnegative 18
- , rationale 18
- , reelle 18, 20
- Zahlendarstellung 19, 216
- Zahlenebene
 - , Gaussische 44
- Zahlenfolgen 120
- Zahlenmenge 18
- Zahlenreihe 122
- Zahlensystem 19
- Zahlungsweise
 - , nachschüssige 128
 - , vorschüssige 128
- Zeile 54
 - , g - 103
- Zeilenbewertungsverfahren 347
- Zeilensumme 290
- Zeilensummennorm 221
- Zeit-Mengen-Bestand 308
- Zeitreihe 310
- Zeitreihenanalyse 309
- Zeitreihenwert 303
- zentrales Moment 253, 263
- Zentralwert 277
- Zielfunktion 93
- Ziffer 19
- Zinsen bei Kontobewegungen 129
- Zinsfuß
 - , interner 141
- Zinssatz
 - , effektiver 149
 - , konformer 133
 - , nomineller 133, 149
 - , realer 149
 - , relativer 133
- Zinsschulden 151
- Zinstage 127
- Zinsteiler 128
- Zinszahl 128
- z -Test 328
- zufälliges Ereignis 239
- Zufallsgröße 248
- Zufallsstichprobe 320
- Zufallsvariable 248
- Zufallsversuch 239
- Zufallszahlen 367
 - , Transformation 370
- Zugangsmasse 306
- zulässige Basislösung 100
- Zuordnungsproblem 338
- Zusammenhangsmaß 289, 292, 299, 301
- Zweifachregression 298
- Zweipunkteform 41