

BEHREND'S
GRITZMANN · ZIEGLER

(HRSG.)

π & Co.

KALEIDOSKOP
DER MATHEMATIK

 Springer

GRIT



KAR

DEE

π und Co.

Kaleidoskop der Mathematik

Ehrhard Behrends • Peter Gritzmann
Günter M. Ziegler
Herausgeber

π und Co.

Kaleidoskop der Mathematik

 Springer

Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Arnimallee 2–6
14195 Berlin
behrends@math.fu-berlin.de

Prof. Günter M. Ziegler
Institut für Mathematik, MA 6-2
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin
ziegler@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Peter Gritzmann
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
Boltzmannstraße 3
85747 Garching
gritzman@ma.tum.de

Korrigierter Nachdruck 2008

ISBN 978-3-540-77888-2

e-ISBN 978-3-540-77889-9

DOI 10.1007/978-3-540-77889-9

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz und Herstellung: le-tex publishing services oHG, Leipzig
Einbandgestaltung: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Vorwort

Haben Sie schon einmal das Stichwort „Mathematik“ bei *Google* eingegeben? Als dieses Buch entstand, waren es 27.200.000 Einträge, beim englischen „mathematics“ sogar 93.100.000; Tendenz steigend. Mathematik und Spaß brachten es immerhin auf 203.000 Einträge, Mathematik und Qual bzw. Mathematik und Frust dagegen „nur“ auf 78.000 bzw. 63.600. Also, Mathematik ist interessant und relevant, kann durchaus Spaß machen, aber manchmal auch frustrieren, dieses Fazit liegt nahe. Und doch scheiden sich an dem Fach die Geister. Glühende Begeisterung auf der einen, aber auch bissige Ablehnung auf der anderen Seite. „Kommt ein Mathematiker in ein Fotogeschäft: ‚Guten Tag, ich möchte einen Film entwickeln lassen.‘ Verkäuferin: ‚ 9×13 ?‘ Mathematiker: ‚117‘ wieso?“ Die perfidere Variante lässt den Mathematiker ‚137‘ antworten, eine Primzahl. Und das ist alles noch harmlos gegenüber den anderen Vorurteilen, denen das Fach bisweilen in der Öffentlichkeit begegnet: abstrakt, weltfremd, ohne Saft und Kraft, erfunden weniger als Mittel zur Bewältigung unserer immer komplexer werdenden Welt sondern eher als Folterwerkzeug für Generationen von Schülerinnen und Schülern. Da ist es schon fast ein Trost, dass Paul Möbius (nein, nicht der berühmte Mathematiker August Möbius, sondern ein, wie es damals hieß, Irrenarzt) vor hundert Jahren festgestellt hat, dass die Mathematik wenigstens „dem Liebestrieb nicht abträglich“ ist.

„Mathematik schult das logische Denkvermögen“, heißt es. Das stimmt, aber Mathematik ist noch viel mehr. Mathematik ist ästhetisch, nützlich und ein wichtiges Instrument der Aufklärung. Mathematik ist kreativ, spannend und unterhaltsam. Und sie kommt überall vor – na ja, fast überall. Sie durchdringt und beeinflusst mittlerweile fast alle Lebens- und Arbeitsbereiche: vom Kraftwerk- oder Fahrzeugbau bis zur Straßen- und Routenplanung, vom bargeldlosen Zahlungsverkehr im Supermarkt bis zur Architektur der kühnsten Gebäude, von der Wettervorhersage bis zum MP3-Player. Natürlich basiert auch das Internet wesentlich (und in großer Vielfalt) auf Mathematik, auch *Google* oder *eBay*. Die Mathematik hat vieles durchdrungen, aber es ist auch vieles noch ungelöst, und der Gang der Welt stellt immer höhere Anforderungen an die Mathematik, Mathematik, die hilft, technische, wirtschaftliche, biologische oder gesellschaftliche Prozesse zu verstehen und zu optimieren.

Dieses Buch will Schlaglichter werfen auf die Mathematik, nicht als Monographie, nicht als Lehrbuch, sondern als eine ganz bunte Collage. Wir haben 39 Artikel und Buchbeiträge zusammengestellt, die viele Aspekte von Mathematik beleuchten. Nicht jeder

Text wird alle ansprechen, aber für jeden sollte etwas dabei sein, wirklich für jeden, denn das Spektrum reicht von feuilletonistischen Einwürfen über fachliche Überblicke bis hin zu spezielleren mathematischen Texten. Leicht verständliche, unterhaltsame Texte finden sich ebenso wie anspruchsvollere mathematische Herausforderungen, naheliegendes ebenso wie kontraintuitives. Auch philosophische, theologische und kulturelle Aspekte werden aufgegriffen, genauso wie zentrale mathematische Probleme, die zum Teil schon seit mehr als einem Jahrhundert auf ihre Lösung warten.

Wenn also etwas zu leicht oder zu schwer ist, einfach überspringen: der nächste Text ist wieder ganz anders. Zwischen den Texten wird es manche Überschneidung und „Wechselwirkung“ geben. Doch jeder steht für sich, die Texte bauen nicht aufeinander auf. Gemeinsam, wie es bei einer Collage so ist, ergeben sie jedoch ein Ganzes, ein Bild von der Vielfältigkeit und Schönheit der Mathematik, von ihrer Nützlichkeit und ihren Herausforderungen und – ganz besonders – von ihrer „jungen Quicklebendigkeit“.

Aus einer Idee von Vasco Alexander Schmidt, die uns drei gleich begeistert hat, ist in kürzester Zeit der jetzt vorliegende Festband entstanden. Wir danken allen, die durch Hinweise, Ratschläge und Ideen, Genehmigungen und Zuarbeit das fast Unmögliche möglich gemacht haben, diesen Band zum Abiturtermin im Mathematikjahr 2008 fertig zu haben. Insbesondere genannt seien Ulrike Schmickler-Hirzebruch bei Vieweg, sowie Rüdiger Gebauer, Clemens Heine, Joachim Heinze und Eric Merkel-Sobotta bei Springer.

Die Herausgeber und die DMV sagen *Herzlichen Dank!*

Berlin und München, März 2008

*Ehrhard Behrends
Peter Gritzmann
Günter M. Ziegler*

Inhalt

I	Prolog	1
	G. von Randow: Mathe wird Kult – Beschreibung einer Hoffnung	3
	A. Beutelspacher: Wieviel Mathematik gibt es?	9
	M. Aigner: Die pure Eleganz der Mathematik	15
	G.M. Ziegler: Wo Mathematik entsteht: Zehn Orte	20
	I. Stewart: Warum Mathematik?	25
II	Dauerbrenner	35
II.1	Primzahlen	
	R. Courant, H. Robbins: Die Primzahlen	41
	M. Aigner, G. M. Ziegler: Sechs Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen	51
	F. Bornemann: Ein Durchbruch für „Jedermann“	55
	G. M. Ziegler: Primzahltests und Primzahlrekorde	63
II.2	Unendlichkeiten	
	H. Heuser: Vorwort	67
	M. Aigner, G. M. Ziegler: Mengen, Funktionen und die Kontinuumshypothese	73
	D. Barthe: Leonhard Eulers unendliche Summen	83
	Lina: Eine Frage und zwei Antworten	88
II.3	Dimensionen	
	E. Behrends: Der fünfdimensionale Kuchen	91
	T.F. Banchoff: Zur Einführung von Dimensionen	94
	R. Courant, H. Robbins: Topologie	105
	T. Gowers: Dimension <i>engl.</i>	128

II.4	Wahrscheinlichkeiten	
	E. Behrends: Der Zufall lässt sich nicht überlisten	145
	J. Bewersdorff: Lottotipps – „gleicher als gleich“?	149
	M. Aigner, G. M. Ziegler: Das Nadelproblem von Buffon	157
	C. Drösner: Frauenfragen oder Mehr ist manchmal weniger	161
	O. Häggström: Drei Paradoxa	171
III	Harte Nüsse	191
III.1	Fermat	
	J. Kramer: Der große Satz von Fermat	195
III.2	P=NP	
	P. Gritzmann, E. Behrends: Eine Million Dollar für die Sicherheit Ihrer Kreditkarte?	206
	M. Grötschel: P = NP?	209
III.3	Die Zeta-Funktion	
	J. Kramer: Die Riemannsche Vermutung	216
III.4	Medaillen für Mathematik	
	G. M. Ziegler: Heiße Tage in Madrid	222
IV	Heiße Themen	231
IV.1	Diskrete Optimierung	
	P. Gritzmann, R. Brandenberg: Kombinatorische Explosion und das Traveling Salesman Problem	235
IV.2	Google	
	E. Behrends: Mit Mathematik zum Milliardär	261
IV.3	Finanzmathematik	
	W. Schachermayer: Die Rolle der Mathematik auf den Finanzmärkten	265
IV.4	Kryptographie	
	A. Beutelspacher, H. B. Neumann, T. Schwarzpaul: Der RSA-Algorithmus	279
IV.5	Spieltheorie	
	K. Sigmund: Eine kurze Geschichte des Nash-Gleichgewichts	297

V	Mathematik ohne Grenzen	311
V.1	Zaubern	
	E. Behrends: Bezaubernde Mathematik: Zahlen	315
	E. Behrends: Bezaubernde Mathematik: Ordnung im Chaos	317
V.2	Kunst	
	E. Behrends: Escher über die Schulter gesehen – eine Einladung	320
V.3	Architektur	
	J. Richter-Gebert, U. Kortenkamp: Zusammenspiel: Mathematik und Architektur	342
V.4	Musik	
	E. Behrends: Von Halbtönen und zwölften Wurzeln	350
V.5	Wahlen	
	W. Leininger: Die Mehrheit entscheidet. Wirklich?	352
V.6	Medizin	
	P. Deuffhard: Maler, Mörder, Mathematiker	358
VI	Zugaben: Kurioses aus dem Alltag	365
	G. M. Ziegler: Mathematik im Alltag	366
VII	Schlussbemerkung	375
	Abbildungsverzeichnis	377
	Quellenverzeichnis	385
	Sachverzeichnis	389

I

Prolog



G. von Randow: Mathe wird Kult – Beschreibung einer Hoffnung aus „Alles Mathematik“ [Vieweg, 2. Auflage 2002], S. 3–7	3
A. Beutelspacher: Wieviel Mathematik gibt es? aus „In Mathe war ich immer schlecht ...“ [Vieweg], S. 43–47	9
M. Aigner: Die pure Eleganz der Mathematik aus: Gegenworte (Zeitschrift der BBAW), Heft 12, Herbst 2003, S. 11–15	15
G.M. Ziegler: Wo Mathematik entsteht: Zehn Orte aus: Gegenworte (Zeitschrift der BBAW), Heft 16, Dezember 2005, S. 12–16	20
I. Stewart: Warum Mathematik? Kapitel 1 aus „Warum (gerade) Mathematik? Eine Antwort in Briefen“ [Spektrum, 2007], S. 1–9	25

Mathe wird Kult – Beschreibung einer Hoffnung

Gero von Randow

Aus den Zeitungen der vergangenen Jahre dürfte der durchschnittliche Leser wohl das Folgende über die Mathematik erfahren haben:

- Ein ehrwürdiges Problem der Mathematik wurde gelöst – dann irgendwie doch nicht – dann irgendwie wieder doch. Der Beweis passt nicht an den Rand einer beschriebenen Seite.
- Jemand anders hat eine riesengrosse Primzahl entdeckt.
- Wieder jemand anders hat die soundsovielte Dezimalstelle hinterm Komma der Zahl Pi herausgefunden. Mit Computern.
- Mathematiker bekommen keinen Nobelpreis, sind aber so ziemlich die einzigen, die wirklich verstehen, was der letztjährige Nobelpreisträger für Wirtschaftswissenschaften eronnen hat.
- Chaostheorie ist der Schlüssel zu den Geheimnissen des Universums, des Managements, des Nahverkehrs und der Liebe.
- Deutsche Schüler können nicht rechnen.
- Staubsauger sind besser, wenn sie mit fusseliger Logik arbeiten.

Alles in allem: Kein sehr befriedigender Befund. Aber er beschreibt nicht die ganze Wirklichkeit. Trotz der nur rudimentären Spuren der Mathematik im öffentlichen Bewusstsein glaube ich, dass sie gute Chancen hat, ein neues Ansehen im breiten Publikum zu erwerben.

Es begann vor wenigen Jahren in Hollywood. Genauer: In dem Film „Jurassic Park“. Eine der Hauptrollen stellt einen Mathematiker dar, der durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist:

- Sein Habitus erinnert an den frühen Tom Jones.
- Er versucht, die Hauptdarstellerin herumzukriegen.
- Sein Gebiet ist die Chaostheorie, aus der unweigerlich folgt, dass die Saurier ausbrechen werden.

Die Saurier brechen aus. Der Mathematiker wird von einem Saurier gebissen. In dem Film „Die Codebreaker“ trat auch ein Mathematiker auf. Diesmal nicht in schwarzen Lederklamotten, sondern in einem weissen Anzug. Er hatte ein sogenanntes Zahlensieb erfunden, mit dem sich ein RSA-Code brechen lässt. Aus diesem Grund wird der Mathematiker schließlich umgebracht.

In beiden Fällen endet es für die Mathematiker nicht eben erfreulich. Aber Opfer sind wohl nötig, um die Mathematik populär zu machen. In beiden Filmen umgibt den

4 Gero von Randow

Mathematiker eine Aura, die Aura des Wissens, die Kraft verleiht. Diese Aura kann der Inhalt eines neuen Kults um die Mathematik werden, den ich heraufziehen sehe. Und zwar aus mehreren Gründen. Der erste Grund liegt auf der Hand: In der Informationsgesellschaft ist die Mathematik ein sogenannter Standortfaktor. Der zweite Grund ist interessanter. Menschen suchen Wissen, auf das sie sich verlassen können, und mehr noch: Viele suchen nach einer neuen Quelle geistiger Sicherheit – die alten Quellen sind versiegt. Esoterische Bücher und naturwissenschaftliche Populärliteratur verkaufen sich aus dem gleichen Grund so gut: Das Publikum sucht Gewissheiten, Wahrheiten, Werte. Es kauft Bücher des Astrophysikers Stephen Hawking, die fast niemand begreifen kann, oder Bücher des Ufologen Johannes von Buttlar, die in gewisser Hinsicht noch unbegreiflicher sind. Und aus diesem Grund werden die Leser auch Bücher über Mathematik aufschlagen, wenn sie glauben, mit ihrer Hilfe die Welt verstehen zu können. Und sie werden Artikel über Mathematik verschlingen, wenn wir Journalisten sie mit dem Hinweis versehen, dass Mathematik etwas über die Welt oder das Denken aussagen kann.

Ein Zweig der Mathematik hat es in dieser Hinsicht bereits weit gebracht: Die sogenannte Chaosmathematik. Sie ist bereits ein Teil der Popkultur geworden.

Das hat unweigerlich auch zu Missverständnissen geführt – manche Leute scheinen mittlerweile zu glauben, in Hamburg gebe es Regenwetter, weil in China ein Sack Reis umfällt: Schmetterlingseffekt. Das ist aber nicht weiter besorgniserregend. Weitaus bedeutsamer ist, dass der Kult um das Chaos viele Menschen der Mathematik ausgesetzt hat. Das Interesse an Mathematik ist gestiegen, und die Attraktivität der Mathematik auch. Diejenigen, die die Chaostheorie und ihre Verwandten trotz des Naserümpfens der Kollegen populär gemacht haben, haben sich um die Mathematik verdient gemacht. Ich bin davon überzeugt, dass sich im lesenden Publikum eine wachsende Nachfrage nach Mathematik wecken lässt. Die Buchverlage scheinen das ähnlich zu sehen; in den vergangenen Monaten kamen etliche populärwissenschaftliche und biographische Bücher über Mathematik auf den Markt.

Das Schwierigste ist freilich nicht, die Nachfrage nach populär dargestellter Mathematik zu wecken, das Schwierigste ist, diese Nachfrage zu decken. Ich möchte ein wenig auf die Schwierigkeit eingehen, über Mathematik zu schreiben.

Journalisten schreiben keine Aufsätze, sondern Stories. Das ist wörtlich gemeint; sie schreiben Geschichten. Es sind Geschichten, die gelesen werden, keine Aufsätze. Journalismus ist der Kampf um die Aufmerksamkeit des Lesers, von der ersten bis zur vorletzten Zeile. Eine Geschichte entfaltet sich jedoch nach ganz anderen Gesetzmäßigkeiten als ein Beweis oder als eine schrittweise Darstellung eines mathematischen Sachverhalts. Wie kommt die Mathematik in die Zeitung? Im Rahmen einer Geschichte. Das Schöne am Fermat'schen Problem war nicht nur, dass es sich mit einer simplen Formel (die freilich für die meisten Redaktionen noch immer zu schwierig war) ausdrücken ließ, sondern dass seine Lösung eine so unglaubliche Geschichte war – da machte es schon nichts mehr, dass es vollkommen unmöglich war, den Lesern eine Ahnung des Beweises zu vermitteln.

Ein anderer Weg der Mathematik in die Zeitung ist das Gleichnis, aus dem wir Einsichten in nichtmathematische Probleme schöpfen können. Gerade weil doch die Mathematik eine Wissenschaft der abstrakten Formen ist, eignen sich etliche ihrer Ge-

genstände als Gleichnisse. Etwa die Theoreme über die Frage, wann sich, laienhaft ausgedrückt, komplexe Systeme aus einfachen Regeln herleiten lassen. Es gibt Systeme, bei denen das möglich ist – doch bei denen der Prozess der Herleitung so extrem viele Schritte erfordern würde, dass er niemals unternommen werden kann. Ein schönes Gleichnis für die Frage, ob es ein Geheimnis des Lebens gibt. Vielleicht gibt es das, aber möglicherweise können wir damit nichts anfangen. Ich glaube, dass Leser sich für solche Gedanken interessieren können.

Ein Problem besteht sicherlich darin, dass nur die wenigsten von uns Journalisten etwas von Mathematik verstehen. Die Mathematik ist für viele von uns so etwas wie ein blinder Fleck. Das menschliche Auge wird mit dem blinden Fleck fertig, indem das Bild, das sich auf der Retina abzeichnet, vom Gehirn ergänzt wird. Die Juristen kennen so etwas und nennen es „Parallelwertung in der Laiensphäre“. Leider hat die Mathematik – für Nichtmathematiker, versteht sich – so gar nichts Anschauliches; selbst Quantenphysik lässt sich noch anschaulicher darstellen. Allerdings wird heutzutage in Visualisierungslabors eine Art experimenteller Mathematik betrieben, die dem Leser auf dem Wege anschaulicher Vorstellung näher gebracht werden kann.

Da ist die Versuchung groß, den Leser wenigstens mit griffigen Anwendungen der Mathematik zu begeistern. Das ist ein legitimes Hilfsmittel. Ich habe auch schon Geschichten über die mathematische Optimierung von Babywindeln geschrieben, über die Simulation des Börsengeschehens oder über artificial life. Das kann unterhaltend sein, sogar lehrreich. Aber es erklärt nicht die Mathematik. Ich glaube, in den meisten Fällen können wir die Mathematik in der Zeitung gar nicht erklären.

Eine Erklärung der Riemannschen Vermutung zum Beispiel würde bereits am Konzept der komplexen Zahl scheitern. Aber das macht auch gar nichts. Der Wissenschaftsjournalist braucht dem breiten Publikum die Mathematik nicht zu erklären; er muss ihm vielmehr das Mathematische erklären. Er kann an einfachen Beispielen, die für einen Mathematiker trivial sein mögen, dem Publikum erklären, was denn das Mathematische ist. Und das sollte er unbedingt tun. Den Lesern das Mathematische nahebringen, ist eine ganz ernsthafte Aufgabe. In den Worten von Alfred North Whitehead: „An der Mathematik selbst gibt es nichts Geheimnisvolles. Sie ist einfach das bedeutendste Beispiel für eine Wissenschaft abstrakter Formen.“ Die abstrakten Schemata der Mathematik und Logik „repräsentieren das Ideenskapital, das jedes Zeitalter für seine Nachkommen treuhänderisch verwalten muss. . . . Man macht sich kaum jemals klar, wie lange solche Schemata im Geist heranreifen können, bis sich irgendwann einmal ein Kontakt mit praktischen Interessen ergibt.“

Dies ist der große, der wichtigste Gedanke, den wir den Lesern erläutern können. Und da ist halt ein bisschen Popkult um die Mathematik nicht hinderlich.

Die Mathematik hat allerdings noch eine andere Eigenschaft, die dem Journalisten sehr nützlich sein kann: das ist ihre Fähigkeit zu verblüffen. Die mathematische Betrachtung eines Problems kann zu kontraintuitiven Ergebnissen führen. So etwas ist für viele Menschen interessant, selbst wenn sie keinen mathematischen Schimmer haben. Sie finden es auch deshalb interessant, weil sie Humor haben. Und der Humor ist eine Hauptwaffe des Journalismus.

Als Beispiel möchte ich Ihnen von meiner Erfahrung mit dem Drei-Türen-Problem erzählen, das auch als das „Ziegenproblem“ bekannt geworden ist (in aller Ausführlich-