LEHRBUCH

Friedrich Sauvigny

Analysis

Grundlagen, Differentiation, Integrationstheorie, Differentialgleichungen, Variationsmethoden

Springer Spektrum

LEHRBUCH

Friedrich Sauvigny

Analysis

Grundlagen, Differentiation, Integrationstheorie, Differentialgleichungen, Variationsmethoden

Springer Spektrum

Springer-Lehrbuch

Friedrich Sauvigny

Analysis

Grundlagen, Differentiation, Integrationstheorie, Differentialgleichungen, Variationsmethoden

Springer Spektrum

Friedrich Sauvigny
Lehrstuhl Mathematik, insbesondere Analysis
Brandenburgische Technische Universität
Cottbus - Senftenberg
Cottbus, Deutschland

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-41506-7 ISBN 978-3-642-41507-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-41507-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 26-01, 28-01, 34-01

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Herrn Professor Dr. Dr.h.c. Erhard Heinz in Dankbarkeit gewidmet

Vorwort

Die Differential- und Integralrechnung hat sich mit ihren vielfältigen Anwendungen über Jahrhunderte entwickelt, wobei bereits L. Euler mit ihrer Darstellung als Buch begonnen hatte. Vorbildliche und umfassende Lehrbücher in mehreren Bänden über dieses zentrale Gebiet im mathematischen Grundstudium sind dem Literaturverzeichnis (siehe etwa H. von Mangoldt und K. Knopp [MK], O. Forster [F], H. Heuser [Hr], H. Amann und J. Escher [AE], K. Königsberger [Koe]) zu entnehmen, wobei uns die Werke von R. Courant [C], H. Grauert [GL1], [GF], [GL2] sowie von S. Hildebrandt [Hi1] und [Hi2] besonders nahe liegen. Die Geschichte der Analysis mit schönen Bildnissen ihrer Begründer wird in der Monographie [So] von T. Sonar dargestellt.

Mit unserer *Einführung in die Analysis* in einem einbändigen Lehrbuch wollen wir *die reelle und komplexe Analysis* so darstellen, dass diese in den ersten drei Semestern eines Mathematik-, Wirtschaftsmathematik-, Physik- oder Informatikstudiums von den Studierenden gut erfasst werden kann. Dabei ist uns die Einbeziehung der komplexen Aussagen besonders wichtig, da sich erst so die ganze Tragweite der Analysis erschließt. Wir werden die Leser auf Differentialgleichungen vorbereiten sowie die gewöhnlichen hier auch behandeln, und wir wollen über die Variationsrechnung die Riemannsche Geometrie in unsere Darstellung einbeziehen.

Wir hoffen ein Lehrbuch anzubieten, das ähnlich W. Rudin's *Principles of Mathematical Analysis* [R] sich als Gesamtdarstellung der Differential- und Integralrechnung von Studenten im Grundstudium gut erarbeiten lässt, ggf. auch im Selbststudium. Unsere Einführung ist wesentlich beeinflusst von den Vorlesungen [H1] – [H3] meines akademischen Lehrers, Herrn Professor Dr. E. Heinz in Göttingen, dessen Grundvorlesungen zur Differential- und Integralrechnung ab dem Wintersemester 1971/72 bis zum Wintersemester 1972/73 auch mir den Weg in die Mathematik geebnet haben. Neben diesen vorbildlichen Vorlesungsskripten von E. Heinz möchte ich auch die eleganten Darstellungen von G. Hellwig [He] hervorheben, dessen inspirierende Vorlesungen zur Höheren Mathematik mit einem großen Auditorium an der Rheinisch-Westfälischen

Technischen Hochschule Aachen von meiner Assistentenzeit bis heute mir immer als Vorbild gegenwärtig sind.

Wenngleich wir in unserem Lehrbuch uns um eine vollständige Darstellung der Analysis bemüht haben, so empfiehlt sich doch ein ergänzendes Studium der *Mengentheoretischen Topologie* und der *Elementaren Differentialgeometrie*. Schon aus Platzgründen verbietet sich hier eine Einbeziehung dieser Inhalte, zumal insbesondere zur Differentialgeometrie wunderschöne Lehrbücher (etwa die Darstellung [BL] von W. Blaschke und K. Leichtweiß) vorliegen.

Jetzt wollen wir die einzelnen Kapitel dieses Buches unseren Lesern vorstellen:

Im Kapitel I gehen wir vom Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus und konstruieren die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als *Äquivalenzklassen* von rationalen *Cauchyfolgen*. Wir können dann die Konvergenzeigenschaften reeller Zahlen aus deren Konstruktion ablesen! Diesem *konstruktiven Prinzip* bleiben wir in unserer *Einführung in die Analysis* treu, und wir reduzieren die axiomatische Methode auf ein Minimum!
Dann werden der n-dimensionale Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ sowie die *Gaußsche Zahlenebene* $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen eingeführt und ihre topologischen Eigenschaften untersucht, wie etwa der Heine-Borelsche Überdeckungssatz. Einer Vorlesung über mengentheoretische Topologie überlassen wir die allgemeineren Begriffsbildungen, welche uns im Spezialfall des $\mathbb{R}^n$ und seiner Teilmengen als *Relativtopologie* zunächst genügen. Grundlegende Sätze über komplexe Folgen und Reihen sowie über Doppelreihen schließen dieses Kapitel ab, und hier weisen wir auf das Skriptum [H1] hin.

Die Stetigkeit von Funktionen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ wird im Kapitel II untersucht, und es wird die Differenzierbarkeit in einer reellen und in einer komplexen Veränderlichen studiert. Wir lernen die *gleichmäßige Konvergenz* von Funktionenfolgen kennen und ermitteln sowohl den Konvergenzradius als auch die Differenzierbarkeit von komplexen Potenzreihen. Für stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen werden wir das *Riemannsche Integral* erklären, damit wir im nächsten Kapitel explizit reelle und komplexe Stammfunktionen verwenden können. Zum Abschluss dieses Kapitels werden die *Taylorsche Formel in einer Veränderlichen* und der *Krümmungsbegriff* von Kurven erklärt.

Auf der Basis der komplexen Exponentialfunktion als Potenzreihe werden im Kapitel III die trigonometrischen Funktionen definiert. Hier zeigt sich sehr deutlich, wie die Fortsetzung ins Komplexe die Rechnungen mit den trigonometrischen Funktionen vereinfacht.
Wenn wir die komplexe Exponentialfunktion umkehren wollen zur *komplexen Logarithmusfunktion*, so erkennen wir B. Riemann's Einsicht, dass sich die Funktionen ihren Definitionsbereich natürlich suchen und dieser nicht künstlich vorgeschrieben werden kann. Ausgehend von universellen Polarkoordinaten studieren wir gründlich die Überlagerungsflächen und können so den

Definitionsbereich der Logarithmusfunktion im Komplexen konkret angeben. Diese Funktion steht im Zentrum des Beweises bei vielen analytischen und geometrischen Aussagen.
Mit der komplexen Logarithmusfunktion definieren wir die *allgemeinen Potenzfunktionen*, und wir können sie auf den entsprechenden Überlagerungsflächen explizit umkehren. Wir erhalten so ein klares Bild von *Riemannschen Flächen* schon in der Grundvorlesung zur Analysis.
Beim Beweis des Fundamentalsatzes des Algebra zeigt sich ganz überzeugend, dass die komplexen Zahlen den angemessenen Rahmen für die Analysis bilden. Auch die Partialbruchzerlegung führt uns sinvollerweise ins Komplexe, jedoch berechnen wir auch den vertrauten Fall durch eine *Projektion auf das Reelle*.

Kapitel IV behandelt zunächst die *partielle Differentiation*, wobei insbesondere die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* vorgestellt werden. Es wird der Fundamentalsatz über die inverse Abbildung mittels Variationsmethoden bewiesen und daraus der Satz über implizite Funktionen hergeleitet. Die *Taylorsche Formel im* $\mathbb{R}^n$ wird zur Lösung von Extremwertaufgaben herangezogen, wobei auch Nebenbedingungen betrachtet werden.
Wir definieren dann *m-dimensionale Mannigfaltigkeiten im* $\mathbb{R}^n$, die als reguläre Nullstellenmenge von $n - m$ Funktionen erscheinen. Da unsere Mannigfaltigkeit $n - m$ Kodimensionen hat, so besitzt der Normalraum an die Fläche dieselbe Dimension. In jedem Punkt der Mannigfaltigkeit entsteht eine *Normalbahn* an die Mannigfaltigkeit, welche für eine Kodimension sich reduziert auf die wohlbekannte Einheitsnormale.
Wollen wir unsere Mannigfaltigkeit *orientieren*, so kommen wir zum Begriff des *Orbitraums* $\mathbb{O}(n, m)$. Dessen Elemente stellen gerade die Normalbahnen dar, wobei wir den Abstand zweier Bahnen durch eine *Metrik* ermitteln. Wir sind jetzt motiviert, allgemein *Metrische Räume* einzuführen.

Im Kapitel V wird das *Riemannsche Integral im* $\mathbb{R}^n$ vorgestellt, welches zur Klasse der stetigen Funktionen mit ihrer gleichmäßigen Konvergenz passt und einleuchtend definiert ist. Es werden *Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen* angegeben und explizite Integrationsmethoden erklärt. Es folgen der *Jordansche Inhalt* und die Integration über *Jordan-Bereiche*. Für die Approximation hat ein *Konvergenzsatz uneigentlicher Riemannscher Integrale* besondere Bedeutung. Diese Aussage bezieht sich auf das *uneigentliche Riemannsche Integral* stetiger Funktionen über offene Mengen des $\mathbb{R}^n$, welches sich bei fast allen Untersuchungen der klassischen Analysis bewährt. In diesem Zusammenhang verweisen wir auf das Skriptum [H2].
Mittels *Zerlegung der Eins* und Induktion über die Raumdimension wird die *Transformationsformel für mehrfache Integrale* bewiesen. Hierbei wird der Umgang mit *Testfunktionen* eingeübt. Eine kurze Einführung in die *Theorie der Differentialformen* bis zum *Stokesschen Integralsatz* für glatt berandete C^2-Mannigfaltigkeiten präsentieren wir in § 8 und § 9 sowie den *Gaußschen Integralsatz* für C^2-Gebiete.

In § 10 leiten wir den *Cauchyschen Integralsatz* aus dem Stokesschen Integralsatz her für *holomorphe Funktionen*, die wir im Sinne von Riemann als stetig komplex differenzierbar definiert haben, und wir beweisen ihre Entwickelbarkeit in eine komplexe Potenzreihe. Schließlich zeigen wir in § 7 und § 11 die Approximierbarkeit stetiger bzw. k-mal stetig differenzierbarer Funktionen durch Polynome bis zu ihren Ableitungen der natürlichen Ordnung k.

Das Kapitel VI beginnt mit der Behandlung von Klassen explizit integrierbarer gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dann wird der *Peanosche Existenzsatz* mit dem *Auswahlsatz von Arzelà-Ascoli* für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung bewiesen. Die *Lipschitz-Bedingung* wird erst zur Klärung der Eindeutigkeits- und Stabilitätsfragen herangezogen. Hier wird auch die differenzierbare Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten bewiesen. Schließlich werden gründlich lineare Systeme von Differentialgleichungen insbesondere mit konstanten Koeffizienten studiert. Hierauf ist die Lösbarkeitstheorie von Differentialgleichungen höherer Ordnung gegründet, die wir in den letzten Abschnitten präsentieren.

In Kapitel VII werden die Grundzüge der eindimensionalen Variationsrechnung vorgestellt, die von den Pionieren J. Bernoulli, L. Euler, J.-L. Lagrange, G.-C. Jacobi, K. Weierstraß und ihren Nachfolgern stets im Zusammenhang mit der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt wurde. Wir beginnen mit den *Euler-Lagrange-Gleichungen* von regulären Variationsfunktionalen in § 1 und überführen diese ins *Hamiltonsche System* mittels *kanonischer Variabler*. Dann betrachten wir in § 3 das Energiefunktional im Riemannschen Raum, vergleichen es mit dem Längenfunktional, und wir definieren *Geodätische*.
Wir führen in § 5 die *kovariante Ableitung* im Riemannschen Raum ein – unabhängig von einer eventuellen Realisierung der Riemannschen Metrik durch eine eingebettete Fläche im Euklidischen Raum. Dann erklären wir die *Riemannsche Schnittkrümmung* und ermitteln die *Gauß-Jacobi-Gleichung* für das Gaußsche Oberflächenelement geodätischer Streifen in § 6. Wir betrachten in § 4 geodätische Kugeln im Riemannschen Raum und schätzen deren *Injektivitätsradius* in § 7 nach unten und oben ab. Mit Hilfe der *Weierstraßschen Feldtheorie* und mittels *Hilbert's inarianten Integrals* weisen wir in § 4 den minimierenden Charakter von gewissen Geodätischen nach.

Wenngleich das Kapitel VII den üblichen Umfang einer einführenden Vorlesung zur Analysis übersteigt, sind dessen Lehrinhalte schon in dieser Phase des Studiums gut zu verstehen; man könnte diese Themen vielleicht auch in einem Proseminar besprechen. Inspiriert zu diesem Kapitel wurden wir durch die wunderschöne Vorlesung von W. Klingenberg [K] zur Differentialgeometrie und das eindrucksvolle Werk von M. Giaquinta und S. Hildebrandt [GH1] und [GH2] zur Variationsrechnung (siehe insbesondere Kapitel VIII). Den genannten Autoren gebührt das besondere Verdienst, diese klassischen Gebiete der Analysis wieder ins Zentrum des mathematischen Interesses gerückt zu haben!

Wir hoffen mit dem Kapitel VII sowohl das Verständnis für den Riemannschen Raum zu fördern als auch unsere Leser zum Studium der *Geometrischen Analysis* zu ermutigen.

Im Kapitel VIII verlassen wir die *klassische Analysis*, indem wir die gleichmäßige Konvergenz zur *punktweisen Konvergenz* abschwächen. In der Integrationstheorie verwenden wir wiederum die *induktive Methode:* Wir setzen das uneigentliche Riemannsche Integral aus dem Kapitel V von den stetigen Funktionen fort auf die wesentlich größere Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Dieses geschieht mit Hilfe des *Daniell-Integrals*, welches ein nichtnegatives, lineares Funktional darstellt, das stetig unter monotoner, punktweiser Konvergenz ist. Im Zentrum der Theorie steht der *Lebesguesche Konvergenzsatz* zur Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung bei majorisierter Konvergenz. Zum Lebesgue-Integral vergleiche man das Skiptum [H3].
Die *Maßtheorie* wird sich dann als Integrationstheorie der charakteristischen Funktionen ergeben. Wir erklären die *Klasse der Lebesgue-messbaren Funktionen* und stellen den *Banachraum* der p-fach integrierbaren Funktionen vor. Während in der klassischen Analysis nur der Banachraum der stetigen Funktionen mit ihrer gleichmäßigen Konvergenz auftritt, stehen nun eine Schar solcher linearer und normierter Funktionenräume zur Verfügung; letztere sind *vollständig* in dem Sinne, dass jede Cauchyfolge einen Grenzpunkt in diesem Raum bzgl. dem angegebenen Konvergenzbegriff besitzt.
Sehr wichtig sind die Vertauschbarkeitssätze in der Integrationsreihenfolge für messbare Funktionen mehrerer Variabler von Fubini und Tonelli. Mit dem *Banachschen Fixpunktsatz*, welcher den Schlüssel zu abstrakten Iterationsmethoden liefert, beenden wir dieses Kapitel.

Unser vorliegendes Lehrbuch haben wir für die Studierenden von Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik vom ersten bis zum dritten Studiensemester verfasst! Eine genaue Angabe der Lehrinhalte ist dem nachfolgenden Inhaltsverzeichnis zu entnehmen. Wir haben nur einfache Übungsaufgaben in die Kapitel I – VI eingefügt, während im Kapitel VII und VIII sich der Leser auch Ergänzungen zur Vorlesung – anhand der angegebenen Literatur – erarbeiten kann.
Wenn wir von Gegenbeispielen einmal absehen, so haben wir nur selten in unserem Lehrbuch Beispiele behandelt, da eben diese häufig in die konstruktiven Beweise der Sätze ihren Eingang gefunden haben. Da die Konstruktionen in ihrer Idee unsere Einführung zur Analysis bestimmen, so sorgen die technischen Durchführungen in gewisser Weise für sich selbst. Wir haben uns bemüht, den angemessenen Abstraktionsgrad für ein gutes Verständnis zu finden: Längere Wiederholungen in der Darstellung haben wir vermieden, und wir können so den Lehrstoff von drei Semestern in einem Lehrbuch konsequent präsentieren. Da unser Lehrbuch sehr geometrisch motiviert ist, empfehlen wir unseren Lesern, sich selbst Skizzen aller Sachverhalte anzufertigen – allerdings können diese Zeichnungen in höheren Dimensionen nur eine Projektion darstellen.

Unser Lehrbuch der Analysis hat insbesondere das Studium der Differentialgleichungen zum Ziel, welche bei all ihren Anwendungen zu lösen sind. Zum gründlichen Studium der partiellen Differentialgleichungen empfehlen wir unsere Lehrbücher [S3] und [S4] sowie die erweiterte englische Ausgabe [S5] und [S6]. Hier werden auch Anwendungen in der Geometrie und der Physik vorgestellt. Die Theorie holomorpher Funktionen, die man traditionell als *Funktionentheorie* bezeichnet, wurde als Studium der Cauchy-Riemann-Gleichungen in diese Darstellung partieller Differentialgleichungen aufgenommen.

Insgesamt ist dieses Lehrbuch aus meinen Vorlesungen zur Analysis entstanden, die ich vom Wintersemester 1992/93 bis zum Sommersemester 2013 an der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus wiederholt gehalten habe. Mein ganz herzlicher Dank gilt Herrn Dr. rer. nat. Michael Hilschenz, Herrn Dipl.-Math. Stephan Schütze und Frau Dr. rer. nat. Claudia Szerement, geb. Werner für ihre Mithilfe beim Erstellen des TEX-Manuskripts.

Ursprünglich beruht diese Abhandlung auf den Skripten *Analysis* I und II meiner Vorlesungen [S1] und [S2] aus dem Wintersemester 1994 und dem Sommersemester 1995 an der BTU Cottbus, die Herr Dipl.-Lehrer Jörg Endemann und Herr Dipl.-Lehrer Klaus-Dieter Heiter vorbildlich ausgearbeitet haben. An dieser Stelle möchte ich Herrn Klaus-Dieter Heiter meinen tiefempfundenen Dank für seine unschätzbare Hilfe bekunden.

Der Begutachtung meines Manuskripts verdanke ich den Vorschlag zu einer harmonischen Abrundung der hier vorgelegten Lehrinhalte. Schließlich möchte ich ganz herzlich Herrn Clemens Heine vom Springer-Verlag in Heidelberg für sein Interesse an meinem Lehrbuchprojekt danken.

Cottbus im September 2013 , Prof. Dr. Friedrich Sauvigny

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere Analysis

der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus – Senftenberg

Inhaltsverzeichnis