

Heinrich Hemme

Das große Buch der Paradoxien

Anaconda

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten
sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2018 Anaconda Verlag GmbH, Köln
Alle Rechte vorbehalten.
Umschlagmotiv: »Optische Täuschung«, picture-alliance, Frankfurt am Main
(© blickwinkel)
Umschlaggestaltung: total italic (Thierry Wijnberg), Amsterdam/Berlin
Satz und Layout: Andreas Paqué, www.paque.de
Printed in Czech Republic 2018
ISBN 978-3-7306-0569-1
www.anacondaverlag.de
info@anacondaverlag.de

Inhalt

0	Einleitung	7
1	Paradoxien der Antike	10
2	Das Barbier-Paradoxon	34
3	Die unerwartete Hinrichtung	40
4	Hempels Raben	47
5	Paradoxien der Wahrscheinlichkeit	56
6	Pascals Wette	75
7	Hilberts Hotel	85
8	Unfaire Spiele	89
9	Ich sehe was, was du nicht siehst	95
10	Die Welt steht Kopf	116
11	Der verschwundene Chinese	132
12	Unmögliche Welten	158
13	Der unendliche Regress	176
14	Benfords Gesetz	190
15	Queen Pippi	194
16	Rätselhafte Erde	223
17	Palindrome	241
18	Mechanische Paradoxien	253
19	Das Möbiusband	259
20	Das Phänomen der kleinen Welt	269
∞	Ende	272
	Personenverzeichnis	272
	Register	283
	Bildnachweis	288



Einleitung

Unsere Welt steckt voller Paradoxien. Sie begegnen uns täglich und überall. Oft bemerken wir sie nicht einmal, und wenn sie uns auffallen, stören sie uns meist gar nicht. Manchmal amüsieren sie uns auch wie das Paradoxon in *Das Leben des Brian*. In diesem Monty-Python-Film aus dem Jahr 1979 wird der Protagonist Brian zu seinem großen Unwillen von einer wachsenden Menschenmenge für den Messias gehalten. Um sie von diesem Glauben abzubringen, hält er eine kleine Rede.

Brian: „Hört zu, ihr versteht das alles falsch. Es ist wirklich nicht nötig, dass ihr mir folgt. Es ist völlig unnötig, einem Menschen zu folgen, den ihr nicht mal kennt! Ihr müsst nur an euch selbst denken! Ihr seid doch alle Individuen.“

Die Menge (einstimmig): „Ja, wir sind alle Individuen!“

Brian: „Und ihr seid alle völlig verschieden.“

Die Menge (einstimmig): „Ja, wir sind alle völlig verschieden!“

Einzelne Stimme aus der Menge: „Ich nicht.“

Sind Sie sich ganz sicher, dass es Sie gibt und dass Sie in diesem Augenblick in meinem Buch lesen? Denn eigentlich ist das unmöglich. Schauen Sie sich doch einmal den Kasten mit den drei Sätzen an.

1. Dieses Buch, das Sie gerade lesen, gibt es tatsächlich.
2. Sie, die dieses Buch gerade lesen, gibt es tatsächlich.
3. Mindestens ein Satz in diesem Kasten ist falsch.

Jeder dieser Sätze kann grundsätzlich wahr oder falsch sein, das will ich gar nicht in Abrede stellen. Ist der dritte Satz falsch, bedeutet dies, dass alle drei Sätze wahr sein müssen. Das ist aber unmöglich, da es dem dritten Satz widerspräche. Folglich ist der dritte Satz wahr und somit mindestens einer der beiden ersten Sätze falsch. Also gibt es entweder dieses Buch nicht, oder es gibt Sie selbst nicht, oder es gibt weder Sie noch das Buch. Welcher der drei Fälle zutrifft, kann ich zwar nicht entscheiden, aber in allen drei Fällen können Sie dieses Buch nicht lesen.

Ich habe das Vorwort dieses Buchs zum Schluss geschrieben. Hätte ich mit dem Vorwort angefangen, hätte ich vermutlich gar nicht weitergearbeitet, denn warum sollte ich ein nicht existierendes Buch für nicht existierende Leser schreiben? Da kann man als Autor wirklich an sich selbst zweifeln. Darum versuche ich erst einmal, die Zweifel auszuräumen. Schauen Sie sich den folgenden Kasten an.

1. Den Autor dieses Buches, Heinrich Hemme, gibt es gar nicht.
2. Beide Sätze in diesem Kasten sind falsch.

Wieder können die Sätze im Kasten grundsätzlich wahr oder falsch sein. Wenn der zweite Satz wahr wäre, wären beide Sätze falsch, also auch der zweite Satz. Das ist aber ein Widerspruch. Folglich muss der zweite Satz falsch sein, und es gibt mindestens einen wahren Satz. Dies kann nur der erste Satz sein. Also gibt es mich gar nicht. Meine Selbstzweifel sind also durchaus berechtigt gewesen.

Selbst wenn es mich nicht gibt und Sie oder dieses Buch gar nicht existieren, so möchte ich Ihnen doch ans Herz legen, mein Werk zu lesen, denn das ist besser als die ewige Glückseligkeit. Warum? Letzten Endes ist nichts besser als die ewige Glückseligkeit, und das Lesen dieses Buches ist besser als nichts. Folglich ist das Lesen dieses Buches besser als die ewige Glückseligkeit.

Umgangssprachlich nennt man alles, was sich anders verhält, als man erwartet, paradox. Dies ist zwar eine recht grobe Verallgemeinerung des wissenschaftlichen Begriffs „paradox“, trifft aber seine ursprüngliche Bedeutung ziemlich gut. Denn das Wort „Paradoxon“ stammt von dem altgriechischen Adjektiv παράδοξος, das „wider Erwarten“ oder „gegen die gewöhnliche Meinung“ bedeutet. In diesem Buch geht es natürlich auch um die Paradoxien der formalen Logik, aber vor allem um Paradoxien in der ursprünglichen Bedeutung des Wortes. Ihnen werden daher viele Paradoxien, Widersinnigkeiten, Kuriositäten, Überraschungen, Spielereien, Absurditäten und Skurrilitäten begegnen, und ich hoffe, Sie finden Gefallen daran.

In den meisten Kapiteln werden Sie eingeladen, selbst Probleme zu lösen. Natürlich verrate ich Ihnen die Lösungen dieser Aufgaben. Sie finden sie jeweils am Ende des Kapitels.

Heinrich Hemme
Aachen, Januar 2018

Bitte lesen Sie diesen Satz nicht.

1 Paradoxien der Antike

Das Lügnerparadoxon

Der Philosoph Epimenides war ein berühmter Seher und Reinigungspriester, der in Knossos auf Kreta und in Athen wirkte. Wann genau er lebte, ist nicht bekannt, wahrscheinlich irgendwann im 5., 6. oder 7. vorchristlichen Jahrhundert. Er gehörte dem enthusiastischen Kult des Zeus und der Kureten an. Über Epimenides waren bereits in der Antike viele Legenden im Umlauf. Angeblich schlief er 57 Jahre in einer Höhle auf Kreta – als Vorläufer der sieben Schläfer von Ephesus und des Rip van Winkle. Die Spartaner sollen ihn in einem Krieg gefangen genommen und hingerichtet haben, weil er ihnen nur Unheil weissagte. Er soll auch oft wiedergeboren worden sein, und ihm wurde ein biblisches Alter von 150 bis 299 Jahren nachgesagt.

Unsterblich wurde Epimenides aber erst durch einen Hexameter, der anonym in der Bibel im Brief des Apostels Paulus an Titus zitiert ist und ihm um 200 n. Chr. vom griechischen Theologen Clemens von Alexandria zugeschrieben wurde: *Einer von ihnen hat als ihr eigener Prophet gesagt: Kreter sind immer Lügner, wilde Tiere, faule Bäume.*¹ Dass Kreter lügen, erwähnt schon zuvor das Gedicht *Ad iovem* von Kallimachos von Kyrene aus dem dritten vorchristlichen Jahrhundert, aber ohne einen Hinweis auf Epimenides. Eine deutlich ältere Variante der Behauptung findet sich schon im Alten Testament im *Buch der Psalmen*: *Ich sprach in meiner Bestürzung: Alle Menschen sind Lügner!*²

Der Bibelvers aus dem Paulusbrief ist die Urform des berühmten Lügnerparadoxons. Der englische Philosoph und Mathematiker Bertrand Russell hat ihn 1908 zunächst in eine griffige Kurzform gebracht: Epimenides der Kreter sagte: „Alle Kreter sind Lügner.“ Dann fasste er ihn noch knapper und schärfer: Ein Mann sagte: „Ich lüge gerade.“³

Wenn man annimmt, dass entweder alle Kreter Lügner oder alle Kreter Wahrheitsager sind und ein Lügner immer lügt und ein Wahrheitsager nie lügt, dann wird der Paulusvers zum Paradoxon. Wenn die Kreter Lügner sind, erklärt sich Epimenides, der ja ebenfalls Kreter ist, durch seine eigene Behauptung zum Lügner. Folglich hat er gelogen, und alle Kreter sind

Wahrheitsager. Dann jedoch ist auch Epimenides ein Wahrheitsager und seine Behauptung, alle Kreter seien Lügner, wäre wahr. Aus diesem logischen Teufelskreis kann man sich nicht befreien.

Die griechischen Philosophen der Antike zerbrachen sich den Kopf darüber, wie es möglich sein konnte, dass eine sinnvoll erscheinende Behauptung weder wahr noch falsch sein kann, ohne sich selbst zu widersprechen.

Tatsächlich ist Epimenides' Behauptung gar kein Paradoxon, aus mehreren Gründen. Einer ist, dass man unter einem Lügner für gewöhnlich keineswegs einen Menschen versteht, der immer und unter allen Umständen die Unwahrheit sagt. Ein Lügner, der stets lügt, wäre in unserer Welt gar nicht überlebensfähig. Wollte ein solcher Lügner beispielsweise in ein Restaurant gehen, um etwas zu essen, und der Ober würde ihn fragen: „Möchten Sie etwas essen?“, müsste er unwahrheitsgemäß mit „nein“ antworten. Unter einem Lügner versteht man normalerweise jemanden, der mehr oder weniger häufig lügt, aber nicht immer. So kann es sein, dass tatsächlich alle Kreter einschließlich Epimenides Lügner sind, er aber gerade bei dieser Behauptung die Wahrheit gesagt hat. Andererseits ist es auch möglich, dass nur manche Kreter Lügner sind, Epimenides zu ihnen gehört und er bei seiner Behauptung gelogen hat.

Nehmen wir trotzdem an, ein Lügner würde immer und unter allen Umständen die Unwahrheit sagen, so gibt es dennoch einen Grund, warum Epimenides' Behauptung kein Paradoxon ist. Wenn alle Kreter Lügner wären, wäre der Satz aus dem Mund des Kreter Epimenides tatsächlich ein Widerspruch. Ist die Behauptung jedoch falsch, sind also nicht alle Kreter Lügner, heißt dies aber keineswegs, dass alle Kreter stets die Wahrheit sagen, sondern nur, dass mindestens ein Kreter kein Lügner ist. Ist also beispielsweise der Kreter Minos ein Wahrheitsager und Epimenides ein Lügner, stellt Epimenides' Behauptung kein Paradoxon dar.

Erst Bertrand Russells Verschärfung des Epimenidesverses wird zu einem echten Paradoxon. Ein Mann sagt: „Ich lüge gerade.“ Sagt der Mann die Wahrheit, so lügt er gerade und kann nicht die Wahrheit sagen. Lügt er aber, so sagt er die Wahrheit und kann nicht lügen. Wie man ihn auch dreht und wendet, der Satz ist stets widersprüchlich.

Auch diese Form des Epimenidesverses war lange vor Russells Zeiten bekannt. Vermutlich hat schon der griechische Philosoph Eubulides von Milet im 4. vorchristlichen Jahrhundert das Paradoxon in der Form „Ich lüge gerade“ beschrieben. Da seine Schriften verloren gingen und es dafür nur Indizien in den Schriften späterer Autoren gibt, ist dies aber nicht ganz sicher.

Das Lügnerparadoxon benötigt einen Sprecher, der eine Aussage über sich selbst macht. Auf ihn kann man aber auch verzichten und das Parado-